

Группы с циклическим представлением, трехмерные многообразия и n -значные группы

А.Ю. Веснин

Томский государственный университет

Новосибирский государственный университет

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

«Алгебраическая топология, гиперболическая геометрия
и компьютерный анализ данных»

Томск, 6-9 декабря 2023

1. Группы с циклическим представлением
2. Группы с циклическим представлением и трехмерные многообразия
3. n -значные группы

Группы с циклическим представлением

Циклические представления

Обозначим через F_m , $m \geq 2$, свободную группу с m (свободными) образующими x_1, x_2, \dots, x_m , пусть $\theta : F_m \rightarrow F_m$ – автоморфизм такой, что $\theta : x_i \rightarrow x_{i+1}$, $i = 1, \dots, m$, где индексы берутся по модулю m .

Для циклически приведенного слова $w \in F_m$ определим **циклическое представление**¹:

$$G_m(w) = \langle x_1, \dots, x_m \mid w = 1, \theta(w) = 1, \dots, \theta^{m-1}(w) = 1 \rangle.$$

Опр. Группа G называется **группой с циклическим представлением** если $G \cong G_m(w)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и некоторого слова $w \in F_m$.

Отметим, что G может иметь разные циклические представления.

¹D.L. Johnson, Topics in the theory of group presentations. London Math. Soc. Lecture Note Series 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

Пример. Слово $w(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3^{-1}$ приводит к группам Фибоначчи

$$F(2, m) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} = x_{i+2}, \quad i = 1, \dots, m \rangle.$$

Изучение этих групп началось с вопроса Конвея²: верно ли, что $F(2, 5)$ – конечная циклическая группа?

Пример. Johnson, Wamsley и Wright ввели³ обобщенные группы Фибоначчи:

$$F(r, m) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} \cdots x_{i+r-1} = x_{i+r}, \quad i = 1, \dots, m \rangle.$$

²J.H. Conway, Advanced problem 5327. Amer. Math. Monthly 72 (1965) p. 915.

³D.L. Johnson, J.W. Wamsley, D. Wright, The Fibonacci groups. Proc. London Math. Soc. 29 (1974), 577-592.

Конечность обобщенных групп Фибоначчи

Проблема конечности. Какие обобщенные группы Фибоначчи являются конечными?

- $F(2, m)$ конечна если и только если $m = 2, 3, 4, 5, 7$;
- $F(r, 2)$ конечна для всех $r \geq 2$.

$r \backslash m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	8	5	11	∞	29	∞	∞	∞
3	8	2	∞	22	1512	?	∞	?	∞
4	3	63	3	∞	?	?	?	?	∞
5	24	∞	624	4	∞	?	∞	∞	?
6	5	5	125	7775	5	∞	?	?	∞
7	48	342	∞	?	$7^6 - 1$	6	∞	?	∞
8	7	∞	7	?	∞	$8^7 - 1$	7	∞	?
9	80	8	6560	∞	?	∞	$9^8 - 1$	8	∞
10	9	999	4905	9	?	?	∞	$10^9 - 1$	9

Группы с циклическим представлением и трехмерные многообразия

Многообразия Фибоначчи

Теорема.⁴ Если $n \geq 2$, то $F(2, 2n) \cong \pi_1(M_n)$, где M_n – замкнутое ориентируемое 3-многообразие, назовем его **многообразием Фибоначчи**. Если $n \geq 4$, то M_n – гиперболическое, то есть $F(2, 2n)$ имеет точное дискретное представление в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$.

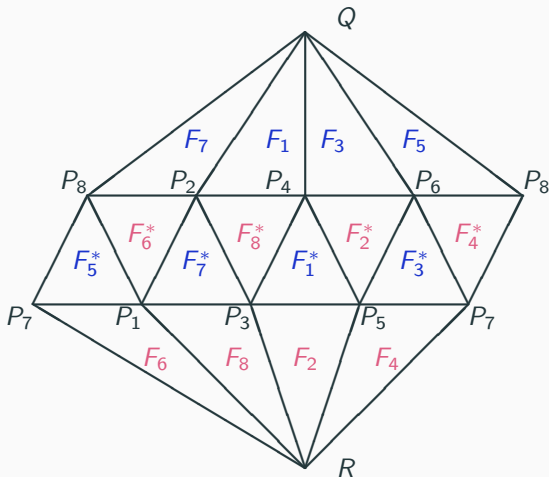
Идея док-ва. Явно построен фундаментальный многогранник \mathcal{P}_n для действия $F(2, 2n)$. Граница \mathcal{P}_n состоит из $4n$ треугольников и \mathcal{P}_n имеет циклическую симметрию порядка n . Многогранник геометрически реализован в \mathbb{H}^3 . В частности, \mathcal{P}_5 – икосаэдр.

⁴Н. Helling, A.C. Kim, J.L. Mennicke, A geometric study of Fibonacci groups. J. Lie Theory 8 (1999).

Фундаментальный многогранник \mathcal{P}_4

если i нечетно, то $x_i : QP_{i+1}P_{i+3} \rightarrow P_{i+2}P_{i+3}P_{i+4}$,

если i четно, то $x_i : RP_{i+1}P_{i+3} \rightarrow P_{i+2}P_{i+3}P_{i+4}$.



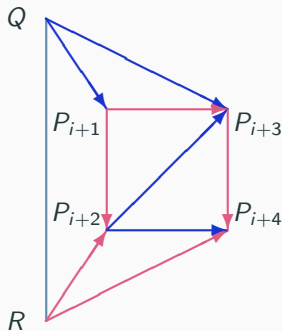
Циклический автоморфизм и циклическая симметрия

\mathcal{P}_n допускает циклическую симметрию ρ порядка n – вращение вокруг оси QR :

$$\rho : F_i \longrightarrow F_{i+2}, \quad \rho : F_i^* \longrightarrow F_{i+2}^*,$$

которая индуцирует автоморфизм группы, $\rho : x_i \longrightarrow x_{i+2} = \rho^{-1}x_i\rho$.

Фундаментальный многогранник для группы $\Gamma_n = \langle F(2, 2n), \rho \rangle$:



Классы эквивалентности ребер

Первый класс эквивалентности::

$$QP_{i+1} \xrightarrow{x_i} P_{i+2}P_{i+3} \xrightarrow{\rho x_{i+1}^{-1}} P_{i+2}P_{i+4} \xrightarrow{x_i^{-1}} QP_{i+3} \xrightarrow{\rho^{-1}} QP_{i+1}$$

Второй класс эквивалентности:

$$RP_{i+4} \xrightarrow{x_{i+1}\rho^{-1}} P_{i+1}P_{i+3} \xrightarrow{\rho x_{i+2}\rho^{-2}} P_{i+1}P_{i+2} \xrightarrow{\rho} P_{i+3}P_{i+4} \xrightarrow{x_{i+1}^{-1}} RP_{i+2} \xrightarrow{\rho} RP_{i+4},$$

Третий класс эквивалентности:

$$QR \xrightarrow{\rho} QR$$

откуда $\rho^n = 1$.

Таким образом, по теореме Пуанкаре о фундаментальном многограннике, группа Γ_n имеет следующее представление:

$$\langle \rho, x_i, x_{i+1} \mid \rho^n = 1, \quad \rho^{-1}x_i\rho = x_i x_{i+1}, \quad \rho^{-1}x_{i+1}\rho = x_{i+1}x_i x_{i+1} \rangle.$$

Циклический автоморфизм и циклическая симметрия

Из $\rho^{-1}x_{i+1}\rho = x_{i+1}\rho^{-1}x_i\rho$ выразим x_i :

$$x_i = \rho x_{i+1}^{-1} \rho^{-1} x_{i+1}.$$

Следовательно,

$$x_{i+1}^{-1} \rho^{-1} x_{i+1} \rho = \rho x_{i+1}^{-1} \rho^{-1} x_{i+1} x_{i+1}.$$

Обозначим $b = x_{i+1} \rho^{-1}$, тогда

$$\Gamma_n = \langle \rho, b \mid \rho^n = b^n = 1, \quad \rho^{-1} [b, \rho] = [b, \rho] b \rangle,$$

где $[b, \rho] = b^{-1} \rho^{-1} b \rho$.

Хорошо известно, что

$$\langle \alpha, \beta \mid \beta^{-1} [\alpha, \beta] = [\alpha, \beta] \alpha \rangle \cong \pi_1(S^3 \setminus K)$$

является фундаментальной группой дополнения к узлу восьмерка K .

Теорема.⁵ Многообразии Фибоначчи M_n , $n \geq 2$, является n -листным циклическим разветвленным накрытием 3-сферы, разветвленным над узлом восьмерка.



⁵ H.M. Hilden, M.T. Lozano, J.M. Montesinos-Amilibia, The arithmeticity of the figure eight knot orbifolds. *Topology'90*, Columbus, 1990. Berlin: de Gruyter, 1992. 169-183.

Группы трехмерных многообразий

Вопрос. Какие конечно представленные группы могут (или не могут) быть реализованы как фундаментальные группы компактных ориентируемых 3-многообразия M^3 ?

Сталлингс⁶ показал, что это вопрос не является алгоритмически разрешимым.

Теорема. Для любого заданного непустого класса \mathcal{M} компактных связных 3-многообразий не существует алгоритма для решения вопроса о том, является или нет конечно представленная группа фундаментальной группой многообразия из класса \mathcal{M} .

Подвопрос. Какие группы с циклическим представлением могут (или не могут) быть реализованы как фундаментальные группы компактного ориентируемого 3-многообразия M^3 ?

⁶J. Stallings, On the recursiveness of sets of presentations of 3-manifold groups. Fund. Math. 51 (1962/1963), 191–194.

Основные способы описания 3-многообразий:

- Фундаментальные многогранники для действия группы.
- Оснащенные зацепления. Теорема Ликориша.
- Сплетение Хегора, Теорема Хегора.
- Разветвленное накрытие S^3 . Теорема Александра.

Основные способы описания 3-многообразий с циклической симметрией:

- Фундаментальные многогранники с циклической симметрией.⁷
- Оснащенные зацепления, имеющие циклическую симметрию.⁸
- Диаграммы Хегора, имеющие циклическую симметрию.⁹
- Разветвленные циклические накрытия.¹⁰

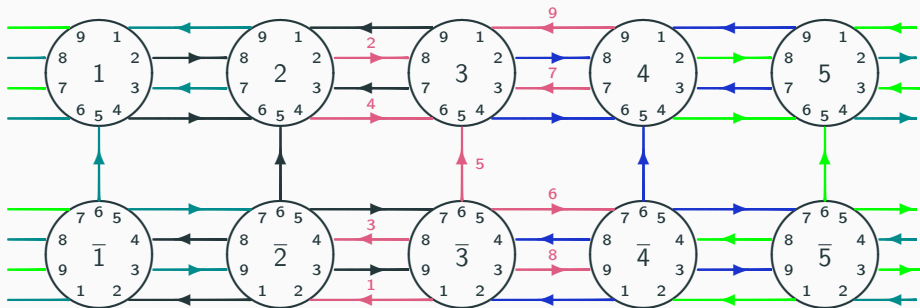
⁷ J. Minkus, The branched cyclic coverings of 2 bridge knots and links. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* 255 (1982), 1–68.

⁸ M. Mulazzani, A. Vesnin. Generalized Takahashi manifolds. *Osaka Math. J.* 39:3 (2002), 705–721.

⁹ M. Dunwoody, *Cyclic presentations and 3-manifolds. Groups-Korea '94*, Walter de Gruyter & Co. Berlin-New York 1995. 47–55.

¹⁰ M. Mulazzani, A. Vesnin, The many faces of cyclic branched coverings of 2-bridge knots and links. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena IL* (2001), 171–215.

Диаграмма Хегора с циклической симметрией



Красная криаея получается при следующих склеиваниях:

$$\begin{aligned} \bar{3}_1 &\longrightarrow \bar{2}_2 \xrightarrow{a_2^{-1}} 2_2 \longrightarrow 3_8 \xrightarrow{a_3} \bar{3}_8 \longrightarrow \bar{2}_4 \xrightarrow{a_2^{-1}} 2_4 \longrightarrow 3_6 \xrightarrow{a_3} \bar{3}_6 \longrightarrow 3_5 \\ &\xrightarrow{a_3} \bar{3}_5 \longrightarrow \bar{4}_7 \xrightarrow{a_4^{-1}} 4_7 \longrightarrow 3_3 \xrightarrow{a_3} \bar{3}_3 \longrightarrow \bar{4}_9 \xrightarrow{a_4^{-1}} 4_9 \longrightarrow 3_1 \xrightarrow{a_3} \bar{3}_1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем слово

$$w_2 = a_1^{-1} a_2 a_1^{-1} a_2 a_2 a_3^{-1} a_2 a_3^{-1} a_2 = (a_1^{-1} a_2)^2 a_2 (a_2^{-1} a_3)^{-2}.$$

Определяющие слова с тремя буквами

Рассмотрим группы Кавикиолли–Хегенбарта–Реповша¹¹

$$G_n(m, k) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid x_i x_{i+m} = x_{i+k}, \quad i = 1, \dots, n \rangle.$$

Теорема.¹² Среди групп $G_n(m, k)$, за исключением двух групп, только конечные циклические группы, группы Сирадски при $(m, k) = (2, 1)$, и группы Фибоначчи с четным числом образующих при $(m, k) = (1, 2)$, являются фунд. группами 3-многообразий.

Две исключительные группы:

$$G_9(4, 1) = \langle x_1, x_2, \dots, x_9 \mid x_i x_{i+4} = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, 9 \rangle,$$

$$G_9(7, 1) = \langle x_1, x_2, \dots, x_9 \mid x_i x_{i+7} = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, 9 \rangle.$$

¹¹A. Cavicchioli, F. Hegenbarth, D. Repovs, On manifold spines and cyclic presentations of groups. Knot Theory, Banach Center 42 (1998). 49-56.

¹²E. Howie, G. Williams, Fibonacci type presentations and 3-manifolds. Topology Appl. 215 (2017), 24-34.

Группы Фибоначчи с нечетным числом порождающих

Утв.¹³ Если m нечетно, то $F(2, m)$ имеет кручение, $(x_1 x_2 \dots x_m)^2 = 1$.

Рассмотрим группы Кэмпбела–Робертсона¹⁴:

$$F(r, m, k) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} \cdots x_{i+r-1} = x_{i+r-1+k}, \quad i = 1, \dots, m \rangle.$$

В частности, $F(r, m, 1) = F(r, m)$ и $F(2, m, 1) = F(2, m)$.

Теорема.¹⁵ Пусть r четно, $m \geq r$ нечетно и $(m, r + 2k - 1) = 1$.

Тогда $F(r, m, k)$ не может быть группой гиперболического 3-орбифлекса (в частности, 3-многообразия) конечного объема.

¹³ D.L. Johnson, Topics in the theory of group presentations. London Math. Soc. Lect. Note Ser. 42, 1980.

¹⁴ C.M. Campbell, E.F. Robertson. A class of finitely presented groups of Fibonacci type. J. London Math. Soc. 11 (1975) 249–255.

¹⁵ A. Szczepanski, A. Vesnin. On generalized Fibonacci groups with odd number of generators. Communications in Algebra 28:2 (2000), 959–965.

Идея доказательства, I

Пусть $\rho : F(r, m, k) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ – такое точное представление, что $\bar{F}(r, m, k) = \rho(F(r, m, k))$ – дискретная группа конечного кообъема.

Пусть $\theta : x_i \rightarrow x_{i+1}$. По теореме жесткости Мостова найдется $t \in \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ такая, что $\theta(\gamma) = t\gamma t^{-1}$ для всех $\gamma \in \bar{F}(r, m, k)$.

Рассмотрим группу $\Gamma(r, m, k) = \langle \bar{F}(r, m, k), t \rangle$, которая будет группой гиперболического 3-орбифлекда конечного объема.

Поскольку t^m коммутирует со всеми элементами неэлементарной группы $\bar{F}(r, m, k)$, получаем $t^m = 1$.

Следовательно, t имеет некоторый порядок m_1 , где m_1 делит m .

Поскольку $x_{i+1} = tx_it^{-1}$, из $x_1x_2 \dots x_r = x_{r+k}$ получаем

$$(x_1t)^r = t^r (t^{k-1} x_1 t^{-(k-1)}).$$

Тогда

$$\Gamma(r, m, k) = \langle x_1, t \mid t^{m_1} = 1, (x_1t)^r = t^r (t^{k-1} x_1 t^{-(k-1)}) \rangle.$$

Идея доказательства, II

Рассмотрим группу

$$\Gamma^{(2)}(r, m, k) = \langle \gamma^2 \mid \gamma \in \Gamma(r, m, k) \rangle.$$

Поскольку m_1 нечетно, $t \in \Gamma^{(2)}(r, m, k)$. Поскольку r четно, имеем $x_1 \in \Gamma^{(2)}(r, m, k)$ и $\Gamma^{(2)}(r, m, k) = \Gamma(r, m, k)$. Значит, $\Gamma(r, m, k)$ – группа сохраняющих ориентацию изометрий и $\Gamma(r, m, k) \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Пусть $t = P \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$ где ζ корень степени $2m_1$ из единицы, и

$P \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$ – образ в $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ матрицы $\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$.

Пусть $x_1 = P \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ где $xw - yz = 1$. При этом, $yz \neq 0$

поскольку $\bar{F}(r, m, k)$ имеет конечный кообъем.

Идея доказательства, III

Тогда

$$\begin{pmatrix} x\zeta & y\zeta^{-1} \\ z\zeta & w\zeta^{-1} \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} \zeta^r & 0 \\ 0 & \zeta^{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y\zeta^{2(k-1)} \\ z\zeta^{-2(k-1)} & w \end{pmatrix}.$$

Индукцией по j получаем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} S_j & bR_j \\ cR_j & T_j \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} S_{j+1} \\ T_{j+1} \\ R_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & bc \\ 0 & d & bc \\ 1 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_j \\ T_j \\ R_j \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \\ 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} S_r & y\zeta^{-1}R_r \\ z\zeta R_r & T_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\zeta^r & y\zeta^{r+2(k-1)} \\ z\zeta^{-r-2(k-1)} & w\zeta^{-r} \end{pmatrix}.$$

Идея доказательства, IV

Таким образом,

$$y\zeta^{-1}R_r = y\zeta^{r+2(k-1)} \quad \text{и} \quad z\zeta R_r = z\zeta^{-r-2(k-1)}.$$

Поскольку $yz \neq 0$, имеем

$$\zeta^{r+2(k-1)+1} = \zeta^{-r-2(k-1)-1},$$

откуда

$$\zeta^{2r+4k-2} = 1.$$

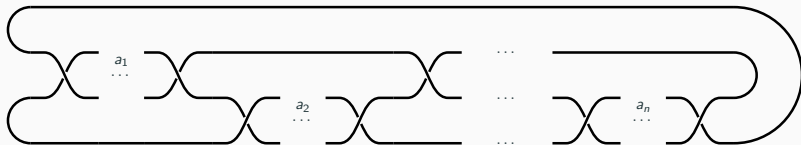
Но ζ – корень степени $2m_1$ и m взаимно просто с $r + 2k - 1$.

Следовательно, $F(r, m, k)$ не может быть группой гиперболического 3-орбифолда конечного объема.

Двухмостовые узлы и зацепления

Двухмостовые узлы и зацепления $b(p/q)$ определяются разложением рационального числа p/q в непрерывную дробь

$$p/q = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}.$$



Дробные группы Фибоначчи

Для взаимно простых k и ℓ определим дробные группы Фибоначчи

$$F^{k/\ell}(2, m) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_i^\ell x_{i+1}^k = x_{i+2}^\ell, \quad i = 1, \dots, m \rangle.$$

В частности, при $k = 1$ и $\ell = 1$ получаем группы Фибоначчи $F(2, m)$.

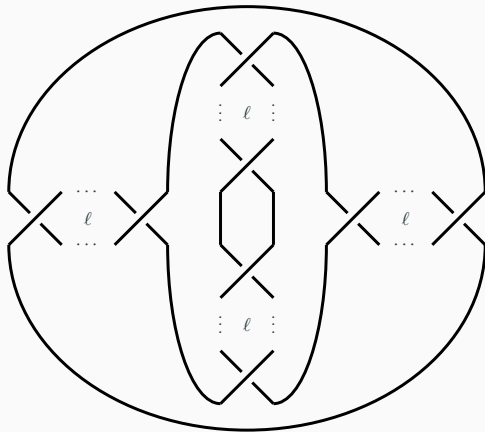
Обозначим через $M_n^{1/\ell}$ 3-многообразие, которое является n -листным разветвленным циклическим накрытием 3-сферы, разветвленным над двухмостовым $b(2\ell + \frac{1}{2\ell})$.

Теорема.¹⁶ $\pi_1(M_n^{1/\ell}) \cong F^{1/\ell}(2, 2n)$ и циклическое накрытие 3-сферы соответствует циклическому автоморфизму $\theta : x_i \rightarrow x_{i+2}$.

$\ell = 1$ даёт многообразия Фибоначчи и узел восьмерка $b(2 + \frac{1}{2})$.

¹⁶А. С. Kim, A. Vesnin. Fractional Fibonacci groups and manifolds. Siberian Math. J. 39 1998, 655-664.

Узел $b(2\ell + \frac{1}{2\ell})$



n-значные группы

n -значное умножение

Напомним понятие n -значных групп следуя¹⁷ и¹⁸.

Пусть X – непустое множество, а $\text{Sym}^n(X)$ – n -я симметрическая степень, т.е., $\text{Sym}^n(X) = X^n / \Sigma_n$, где симметрическая группа Σ_n действует перестановками:

$$\text{Sym}^n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \sim (x_1, \dots, x_n), \sigma \in \Sigma_n\}.$$

Элементами $\text{Sym}^n(X)$ являются n -мультимножества $[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

n -значным умножением на X назовем отображение

$$\mu : X \times X \rightarrow \text{Sym}^n(X),$$

$$\mu(x, y) = x * y = [z_1, z_2, \dots, z_n], \quad \text{где } z_k = (x * y)_k.$$

¹⁷V.M. Buchstaber, E.G. Rees, Multivalued groups, their representations, and Hopf algebras. Transform. Groups 2:4 (1997), 325–349.

¹⁸V.M. Buchstaber, n -Values groups: theory and applications. Moscow Math. J., 6:1 (2006), 57–84.

n -значные группы

Определим следующие обобщения известных аксиом группы.

(i) **Ассоциативность.** n^2 -мультимножества

$$[x * (y * z)_1, x * (y * z)_2, \dots, x * (y * z)_n]$$

и

$$[(x * y)_1 * z, (x * y)_2 * z, \dots, (x * y)_n * z].$$

равны для всех $x, y, z \in X$.

(ii) **Единица.** Элемент $e \in X$ такой, что

$$e * x = x * e = [x, x, \dots, x].$$

для всех $x \in X$.

(iii) **Обратный элемент.** Отображение $\text{inv} : X \rightarrow X$ такое, что

$$e \in \text{inv}(x) * x \quad \text{and} \quad e \in x * \text{inv}(x).$$

для всех $x \in X$.

Опр. Умножение $\mu : X \times X \rightarrow \text{Sym}^n(X)$ задает структуру n -значной группы (X, μ, e, inv) на X если оно ассоциативно, существуют e и inv .

Гомоморфизмы n -значных групп

Для отображения $f : X \rightarrow Y$ пусть $\text{Sym}^n(f) : \text{Sym}^n(X) \rightarrow \text{Sym}^n(Y)$ – его n -я симметрическая степень, определенная по правилу

$$\text{Sym}^n(f)([x_1, \dots, x_n]) = [f(x_1), \dots, f(x_n)].$$

Опр. Пусть $(X, \mu_X, e_X, \text{inv}_X)$ и $(Y, \mu_Y, e_Y, \text{inv}_Y)$ – две n -значные группы. Отображение $f : X \rightarrow Y$ назовем **гомоморфизмом n -значных групп**, если

- (i) $\mu_Y(f(x), f(x')) = \text{Sym}^n(f)(\mu_X(x, x'))$ для всех $x, x' \in X$;
- (ii) $f(e_X) = e_Y$;
- (iii) $f(\text{inv}(x)) = \text{inv}(f(x))$ для всех $x \in X$.

Косетная конструкция

Пусть G – группа с умножением μ_G , единицей e_G и $\text{inv}_G(u) = u^{-1}$.

Пусть $A < \text{Aut } G$ – конечная подгруппа порядка n , $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Пусть $X = G/A = \{A(g) \mid g \in G\}$ – множество орбит и $\pi : G \rightarrow X$ – отображение проекции, $\pi(g) = A(g) = \{\alpha_1(g), \dots, \alpha_n(g)\}$.

Определим n -значное умножение $\mu : X \times X \rightarrow \text{Sym}^n(X)$ формулой

$$\mu(x, y) = [\pi(\mu_G(u, \alpha_1(v))), \dots, \pi(\mu_G(u, \alpha_n(v)))],$$

где $u \in \pi^{-1}(x)$ и $v \in \pi^{-1}(y)$.

Теорема. Положим $e_X = \pi(e_G)$ и $\text{inv}_X(x) = \pi(u^{-1})$, где $u \in \pi^{-1}(x)$. Тогда набор $(X, \mu, e_X, \text{inv}_X)$ является n -значной группой.

Опр. n -значная группа (X, μ) , где $X = G/A$ и μ как выше, называется n -значной косетной группой пары (G, A) .

Определим n -значные группы для циклических представлений.¹⁹

Косетная конструкция приводит к следующему результату.

Теорема. Пусть $G_m(w) = \langle x_1, \dots, x_m \mid w, \theta(w), \dots, \theta^{m-1}(w) \rangle$ – циклическое представление с определяющим словом w , а $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – подгруппа конечного порядка n в группе, порожденной $\theta : x_i \rightarrow x_{i+1}$, $i = 1, \dots, m$. Пусть $X(w) = G_m(w)/A$ и $\pi : G_n(w) \rightarrow X(w)$. Определим $\mu_A : X(w) \times X(w) \rightarrow \text{Sym}^n(X(w))$ по формуле

$$\mu_A(x, y) = [\pi(\mu_G(u, \alpha_1(v))), \dots, \pi(\mu_G(u, \alpha_n(v)))] ,$$

где $u \in \pi^{-1}(x)$ и $v \in \pi^{-1}(y)$. Тогда $(X(w), \mu_A)$ – n -значная группа.

¹⁹В.М. Бухштабер, А.Ю. Веснин, n -значные группы и трехмерные гиперболические многообразия.
(work in progress)

Пример. 4-значная группа, соответствующая $F(2, 4)$

Рассмотрим $G_4(w)$ для $w = x_1x_2x_3^{-1}$, то есть группу Фибоначчи $F(2, 4)$:

$$G_4 = G_4(w) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1x_2 = x_3, x_2x_3 = x_4, x_3x_4 = x_1, x_4x_1 = x_2 \rangle.$$

Тогда $G_4 \cong C_5 = \langle a \mid a^5 = 1 \rangle$, где $x_1 = a, x_2 = a^3, x_3 = a^4, x_4 = a^2$.

Автоморфизм $\theta : x_i \rightarrow x_{i+1}$ порождает группу $A_4 = \langle \theta \mid \theta^4 = 1 \rangle$.

Значит, $Y = G_4/A_4 = \{y_0 = \{1\}, y_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\}$ и $\pi : G_4 \rightarrow Y$ такая, что $\pi(1) = y_0, \pi(x_1) = \pi(x_2) = \pi(x_3) = \pi(x_4) = y_1$. Косетная конструкция дает умножение $\mu_4 : Y \times Y \rightarrow \text{Sym}^4(Y)$, где

$$\mu_4(y_0, y_0) = [y_0, y_0, y_0, y_0],$$

$$\mu_4(y_0, y_1) = [y_1, y_1, y_1, y_1],$$

$$\mu_4(y_1, y_1) = [y_1, y_1, y_0, y_1],$$

Таким образом, (Y, μ_4) – коммутативная 4-значная группа с единицей y_0 и обратным отображением $\text{inv}(y_1) = y_1$.

Пример. 2-значная группа, соответствующая $F(2, 4)$

Для этой же группы

$$G_4 = F(2, 4) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1x_2 = x_3, x_2x_3 = x_4, x_3x_4 = x_1, x_4x_1 = x_2 \rangle$$

рассмотрим автоморфизм $\psi : x_i \rightarrow x_{i+2}$. Пусть $B_2 = \langle \psi \mid \psi^2 = 1 \rangle$ и $Z = G_4/B_2 = \{z_0 = \{1\}, z_1 = \{x_1, x_3\}, z_2 = \{x_2, x_4\}\}$. Для $\pi : G_4 \rightarrow Z$ имеем $\pi(1) = 1$, $\pi(x_1) = \pi(x_3) = z_1$ и $\pi(x_2) = \pi(x_4) = z_2$. Косетная конструкция дает умножение $\mu_2 : Z \times Z \rightarrow \text{Sym}^2(Z)$, где

$$\mu_2(z_0, z_0) = [z_0, z_0],$$

$$\mu_2(z_0, z_1) = [z_1, z_1],$$

$$\mu_2(z_0, z_2) = [z_2, z_2],$$

$$\mu_2(z_1, z_1) = [z_2, z_0],$$

$$\mu_2(z_1, z_2) = [z_1, z_2],$$

$$\mu_2(z_2, z_2) = [z_1, z_0].$$

Таким образом, (Z, μ_2) – коммутативная 2-значная группа с единицей z_0 и обратным $\text{inv} : Z \rightarrow Z$, где $\text{inv}(z_1) = z_1$ и $\text{inv}(z_2) = z_2$.

Действие групп

Классическая группа G с умножением $\mu_G(g, h) = g * h$ действует слева на пространстве V , если определено отображение $G \times V \rightarrow V$, сопоставляющее паре (g, v) элемент $g(v) \in V$, такое, что выполнены следующие условия:

- (i) $(g * h)(v) = g(h(v))$ для всех $g, h \in G, v \in V$;
- (ii) $e(v) = v$ для всех $v \in V$, где $e \in G$ – единичный элемент.

Пусть задано действие группы G на пространстве V и действие конечной группы A порядка n на V . Если задано представление $\rho : A \rightarrow \text{Aut}(G)$ и выполнено

$$\alpha(g(v)) = \alpha(g)(\alpha(v)) \quad \text{для всех } g \in G, \alpha \in A, v \in V,$$

где $\alpha(g) = \rho(\alpha)(g)$, то говорят, что тройка (G, A, ρ) действует эквивариантно на V .

Действие n -значных групп

Опр. Будем говорить, что n -значная группа (X, μ) действует на множестве Y , если определено отображение $\varphi : X \times Y \rightarrow \text{Sym}^n(Y)$ по правилу $\varphi(x, y) = x \circ y = [y_1, \dots, y_n]$ такое, что

- (i) для всех $x_1, x_2 \in X$ и $y \in Y$ имеет место равенство n^2 -мультимножеств

$$x_1 \circ (x_2 \circ y) = [x_1 \cdot y_1, \dots, x_1 \cdot y_n]$$

и

$$(x_1 * x_2) \circ y = [z_1 \cdot y, \dots, z_n \cdot y],$$

где $x_2 \circ y = [y_1, \dots, y_n]$ и $x_1 * x_2 = [z_1, \dots, z_n]$;

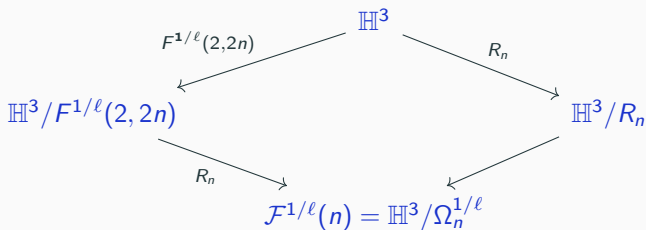
- (ii) $e \circ y = [y, \dots, y]$ для всех $y \in Y$, где e – единичный в X .

Лемма. Если тройка (G, A, ρ) , где $\rho : A \rightarrow \text{Aut}(G)$, действует эквивариантно на пространстве V , то имеет место действие косетной группы $X = G/\rho(A)$ на пространстве орбит $Y = V/A$. В этом случае будем говорить, что X действует косетно на V .

Действие n -значных гиперболических косетных групп

Теорема. Пусть $G_m(w) < \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ такая, что $M_m(w) = \mathbb{H}^3/G_m(w)$ – замкнутое ориентируемое гиперболическое 3-многообразие. Пусть A – конечная подгруппа порядка k в группе $\text{Isom}^+(M_m(w))$. Тогда k -значная косетная группа $G_m(w)/A$ действует на \mathbb{H}^3/A .

Следствие. Пусть $F^{1/\ell}(2, 2n)$ – дробная группа Фибоначчи, $n \geq 4$. Тогда n -значная косетная группа $F^{1/\ell}(2, 2n)/R_n$ действует на \mathbb{H}^3/R_n , где R_n порождена изометрией \mathbb{H}^3 , сопрягающей x_i с x_{i+2} для $i = 1, \dots, 2n$.



Спасибо за внимание!