

Инварианты заузленных графов и построенных по графам зацеплений

Ошмарина Ольга

НГУ, ТГУ

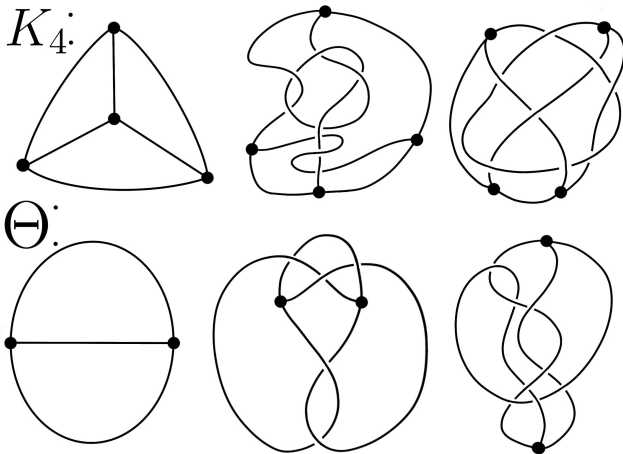
Заузленные графы и зацепления

Пусть G — конечный граф. Гладкое вложение $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется **пространственным вложением** G , а образ $f(G)$ — **заузленным (пространственным) графом**.

Зацепление — гладкое вложение одной (тогда это называется **узлом**) или нескольких попарно не пересекающихся окружностей в \mathbb{R}^3 .

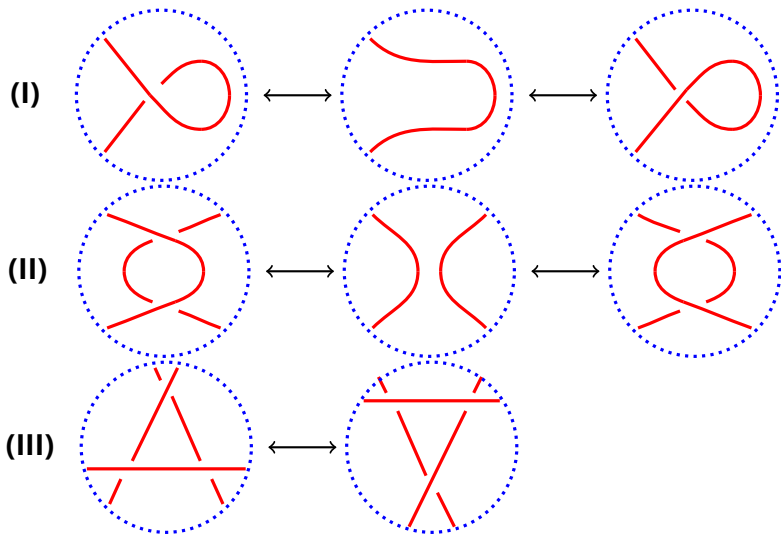
Два зацепления L и L' (соответственно, пространственных графа G и G') **изотопны**, если существует изотопия $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($0 \leq t \leq 1$), такая, что $h_0 = id$ и $h_1(L) = L'$ (соответственно, $h_1(G) = G'$).

Диаграммы на плоскости

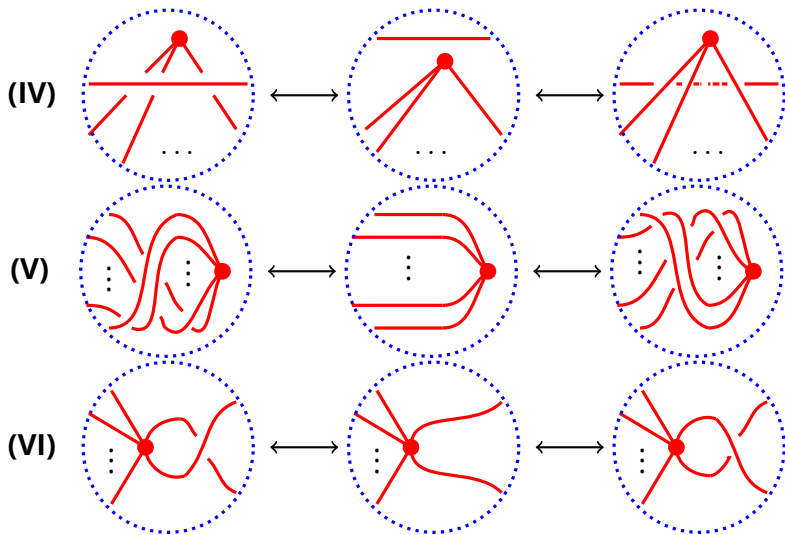


Граф K_4 и θ -граф и их вложения

Обобщённые движения Рейдемейстера



Обобщённые движения Рейдемейстера



Лемма

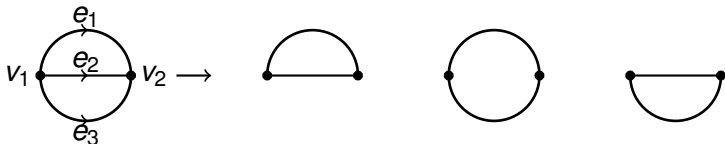
Два зацепления L и L' изотопны тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность движений (I)-(III), переводящая диаграмму L в диаграмму L' .

Лемма

Два заузленных графа G и G' изотопны тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность движений (I)-(VI), переводящая диаграмму G в диаграмму G' .

θ -граф и его вложения

θ -графом называется граф, состоящий из двух вершин v_1 и v_2 и рёбер e_1 , e_2 и e_3 , соединяющих эти вершины.



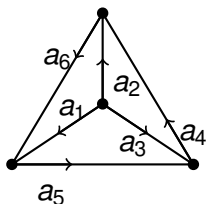
Гладкое вложение θ -графа в \mathbb{R}^3 называется **пространственным θ -графом**.

Теорема (Wolcott, 1986)

Для любых заданных узлов K_1 , K_2 , K_3 существует такой пространственный θ -граф Θ , что эти узлы являются образами вложения пар рёбер. Более того, узлы K_1 , K_2 , K_3 не определяют Θ однозначно.

Граф K_4 и его вложения

Графом K_4 называется простой полный граф с четырьмя вершинами.

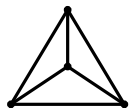


Гладкое вложение K_4 в \mathbb{R}^3 называется **пространственным графом K_4** .

Теорема (Yamamoto, 1990)

Пусть даны c_1, \dots, c_7 - семь циклов в K_4 . Для любых заданных семи узлов k_1, \dots, k_7 существует такое вложение K_4 в \mathbb{R}^3 , что соответствующие образы циклов c_1, \dots, c_7 совпадают с узлами k_1, \dots, k_7 .

Диаграммы заузленных графов K_4



Ω_1



Ω_2



Ω_3



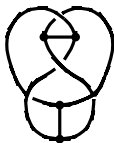
Ω_4



Ω_5



Ω_6



Ω_7



Ω_8



Ω_9



Ω_{10}

- L. H. Kauffman, J. Simon, K. Wolcott, P. Zhao, *Invariants of theta-curves and other graphs in 3-space*, Topology Appl. **49** (1993), no. 3, 193-216.
- Y. Huh, *Yamada polynomial and associated link of θ -curve*.

Полином Джонса

Пусть дана диаграмма D некоторого зацепления L . Определим $\langle D \rangle$ (скобочный полином Кауффмана) через соотношения:

$$(1) \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \rangle \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle;$$

$$(2) \langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle;$$

$$(3) \langle \bigcirc \rangle = 1.$$

Полином Джонса

Ориентируем данное зацепление, а после для каждого перекрёстка c определим **знак** $\varepsilon(c)$ согласно правилу:



$$\varepsilon(c) = +1$$



$$\varepsilon(c) = -1$$

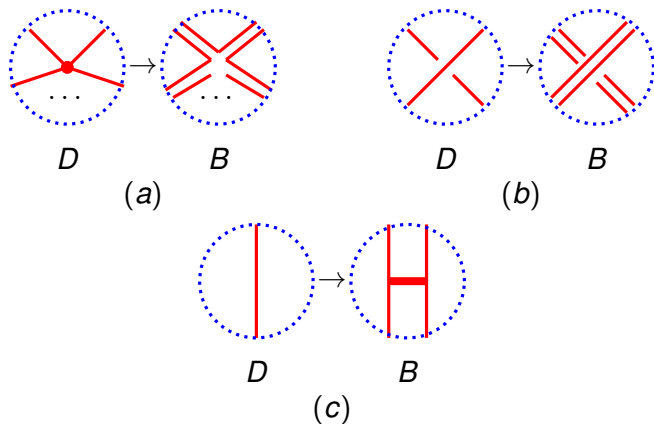
Введём число $w(D) = \sum_{i \in Cr(D)} \varepsilon_i$, где $Cr(D)$ — множество всех перекрёстков в диаграмме D , а $\varepsilon_i = 1$ или $\varepsilon_i = -1$. Тогда нормированный скобочный полином

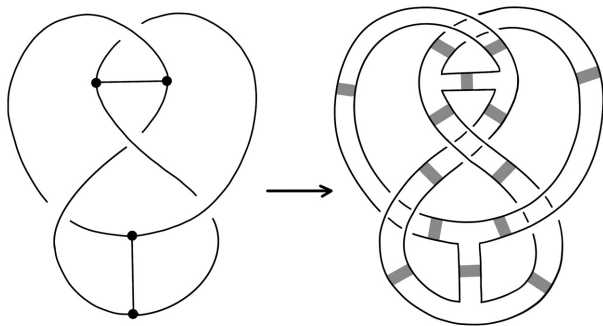
$$V(L) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$$

— это **полином Джонса**, инвариант для зацеплений.

Полином Эгера

Для диаграммы D вложения графа G определим диаграмму с чёрточками (bar diagram) B_D как ленточную диаграмму, полученную из D согласно правилам:





Пример диаграммы с чёточками для Ω_7 .

Полином Егера

Для диаграммы без чётрочек B (зацепления):

$$R(B) = \mathfrak{D}(B; a, z = t - t^{-1}),$$

где $\mathfrak{D}(a, z)$ — Дубровник-полином для зацеплений.

Для диаграммы B_D мы доопределим полином R следующим соотношением:

$$R\left(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}\right) = \frac{1}{t + t^{-1}} \left(R\left(\begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array}\right) + t^{-1} R\left(\begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array}\right) + \frac{t - t^{-1}}{1 - at} R\left(\begin{array}{|c|} \hline \cup \\ \hline \end{array}\right) \right).$$

Полином Егера:

$$J(D) = R(B_D).$$

Тогда определим полином для диаграммы заузленного графа:

$$\mathfrak{J}(D; A) = J(D, a = -A^3, t = A).$$

Лемма (Нин, 2022)

Пусть G — планарный граф, \mathcal{G} — его пространственное вложение, D — диаграмма вложения. Тогда

$$Y(D; A^4) = -(A^2 + A^{-2})^{|E(G)| - |V(G)| + 1} \mathfrak{J}(D; A), \quad (1)$$

где $E(G)$ — множество рёбер, $V(G)$ — множество вершин, $Y(D)$ — полином Ямады для заузленных графов.

Построение зацепления по графу

Пусть $K_1 \cup K_2$ — двухкомпонентное зацепление, D — его диаграмма, $C(D)$ — множество всех перекрёстков в D . Обозначим через $C(K_1 \cap K_2)$ подмножество $C(D)$, состоящее из перекрёстков между K_1 и K_2 . Тогда функция $\text{lk}(K_1, K_2)$ задаётся как

$$\text{lk}(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{c \in C(K_1 \cap K_2)} \varepsilon(c).$$

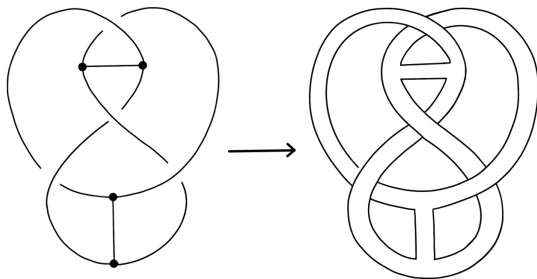
Для каждой ориентируемой поверхности S определена **форма Зейферта** — функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$, действующая по правилу:

$$\langle x, y \rangle = \text{lk}(x^+, y),$$

где x, y — циклы на S , x^+ — результат «выталкивания» x в $\mathbb{R}^3 \setminus S$ на малую величину вдоль положительной нормали к S .

Построение зацепления по графу

Каждому заузленному графу \mathcal{G} можно сопоставить ориентируемую поверхность S так, чтобы она содержала \mathcal{G} и \mathcal{G} был её деформационным ретрактом.



Будем обозначать такую поверхность через $S(\mathcal{G})$.

Построение зацепления по графу

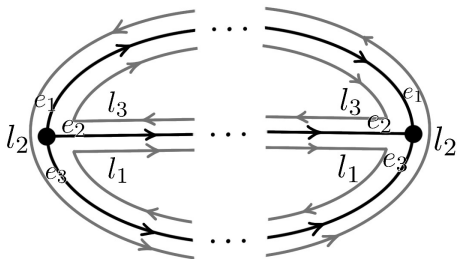
Теорема (Kauffman, Simon, Wolcott, Zhao, 1993)

Пусть G — тривалентный планарный граф, \mathcal{G} — его гладкое вложение в \mathbb{R}^3 . Тогда верны следующие утверждения:

- (1) Если число рёбер в $G \leq 6$, то для любого вложения \mathcal{G} существует единственная (с точностью до пространственной изотопии) поверхность $S(\mathcal{G})$ с нулевой формой Зейферта.
- (2) Если число рёбер в $G > 6$, то
 - (i) существует вложение \mathcal{G} , для которого нет поверхности $S(\mathcal{G})$ с нулевой формой Зейферта.
 - (ii) если поверхность $S(\mathcal{G})$ с нулевой формой Зейферта существует, то она единственна.

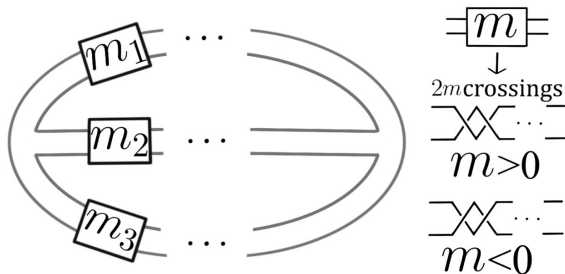
Построение зацепления по θ -графу

Пусть D — диаграмма пространственного θ -графа. Построим её ленточную диаграмму и обозначим её границу через L_θ .
Зададим на L_θ ориентацию следующим образом:



Построение зацепления по θ -графу

Будем добавлять к этой поверхности полуобороты так, чтобы форма Зейфerta стала равна нулю. Граница новой поверхности является зацеплением, построенным по пространственному θ -графу. Обозначим его через \mathcal{L}_θ .



Результаты для θ -графа

Рассмотрим нормированный полином Егера:

$$\tilde{\mathfrak{J}}(D_\Theta) = A^{8(m_1+m_2+m_3)} \mathfrak{J}(D_\Theta).$$

В работе Y. Nuh, *Yamada polynomial and associated link of θ -curve* было показано, что $\tilde{\mathfrak{J}}(D_\Theta)$ — инвариант для заузленных θ -графов, а также была доказана теорема:

Теорема (Nuh, 2022)

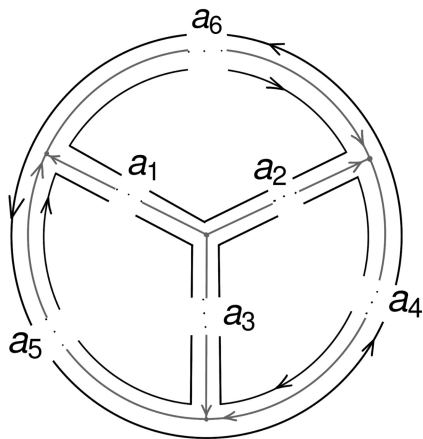
Пусть Θ — заузленный θ -граф, $\{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3\}$ — его подузлы, а \mathcal{L}_Θ — построенное по Θ зацепление. Тогда

$$\tilde{\mathfrak{J}}(\Theta) - V(\mathcal{L}_\Theta) = \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathfrak{J}}(\mathcal{K}_i) - \frac{1}{\varphi^2},$$

где $\varphi = A^2 + A^{-2}$.

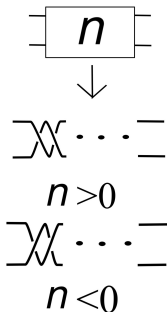
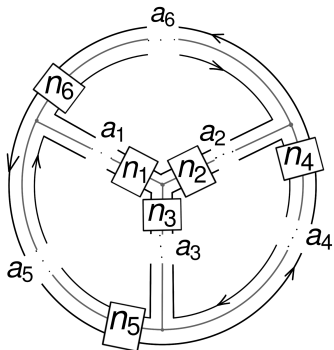
Построение зацепления по графу K_4

Пусть D — диаграмма пространственного графа K_4 . Построим её ленточную диаграмму. Границу получившейся поверхности обозначим L и зададим на ней ориентацию так, как указано на рисунке:



Построение зацепления по графу K_4

Подправим полученную поверхность, добавив полуобороты так, чтобы форма Зейферта была равна нулю. Границу получившейся поверхности обозначим \mathcal{L} — это и есть зацепление, построенное по графу K_4 .



Результаты для графа K_4

Обозначим $\tilde{\mathfrak{J}}(D) = A^{8(n_1+n_2+\dots+n_6)}\mathfrak{J}(D)$.

Теорема

$\tilde{\mathfrak{J}}(D)$ — инвариант пространственного графа K_4 .

Теорема

Пусть D — диаграмма пространственного графа K_4 , $\{\Theta_i^{(2)} \mid i = 1, \dots, 6\}$, $\{t_j^{(2)} \mid j = 1, \dots, 4\}$, $\{q_k^{(2)} \mid k = 1, \dots, 3\}$ — ленточные зацепления, соответствующие заузленным θ -графам и циклам, состоящим из 3-х и 4-х рёбер, в графе K_4 . Тогда:

$$\tilde{\mathfrak{J}}(D) = A^{8(n_1+\dots+n_6)} \left(\langle L \rangle + \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^6 \langle \Theta_i^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi^2} \left(2 \sum_{j=1}^4 \langle t_j^{(2)} \rangle + \sum_{k=1}^3 \langle q_k^{(2)} \rangle \right) + \frac{6}{\varphi^3} \right),$$

где $\varphi = A^2 + A^{-2}$.

Результаты для графа K_4

Теорема

Пусть Ω — вложение графа K_4 в \mathbb{R}^3 , $\{\Theta_i \mid i = 1, \dots, 6\}$ — множество θ -графов в Ω , $\{I_j \mid j = 1, \dots, 7\}$ — множество циклов в Ω , \mathcal{L} — построенное по графу зацепление. Тогда:

$$\tilde{\mathfrak{J}}(\Omega) - V(\mathcal{L}) = \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^6 \tilde{\mathfrak{J}}(\Theta_i) - \frac{1}{\varphi^2} \sum_{j=1}^7 \tilde{\mathfrak{J}}(I_j) + \frac{1}{\varphi^3},$$

где $\varphi = A^2 + A^{-2}$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!