

Присоединённая алгебра Ли прямоугольной группы Кокстера

Yakov Veryovkin

Higher School of Economics, Moscow State University

Конференция “Алгебраическая топология, гиперболическая
геометрия и компьютерный анализ данных”

Томск, 5–9 декабря 2023

1. Полиэдральные и граф-произведения

Пусть \mathcal{K} а **симплициальный комплекс** на множестве $[m] = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, $\emptyset \in \mathcal{K}$.
 $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}$ называется **симплексом**.

$(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$ последовательность пар топологических пространств, $A_i \subset X_i$.

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$, положим

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = Y_1 \times \dots \times Y_m \quad \text{where } Y_i = \begin{cases} X_i & \text{if } i \in I, \\ A_i & \text{if } i \notin I. \end{cases}$$

1. Полиэдральные и граф-произведения

\mathcal{K} -полиэдральным произведением (\mathbf{X}, \mathbf{A}) называется

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{j \notin I} A_j \right),$$

где объединение берётся внутри $X_1 \times \cdots \times X_m$.

Обозначения: $(X, A)^{\mathcal{K}} := (\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathcal{K}}$ где все $(X_i, A_i) = (X, A)$;

$\mathbf{X}^{\mathcal{K}} := (\mathbf{X}, pt)^{\mathcal{K}}$, $X^{\mathcal{K}} := (X, pt)^{\mathcal{K}}$.

Пример

Пусть $(X, A) = (S^1, pt)$, где S^1 обозначает окружность. Тогда

$$(S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (S^1)^I \subset (S^1)^m.$$

Когда $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \dots, \{m\}\}$ (дискретный набор из m точек), полиэдральное произведение $(S^1)^{\mathcal{K}}$ является букетом из m окружностей $(S^1)^{\vee m}$.

Когда \mathcal{K} содержит все собственные подмножества $[m]$ (граница $\partial \Delta^{m-1}$ – $(m-1)$ -мерного симплекса), $(S^1)^{\mathcal{K}}$ является **толстым букетом** m окружностей; это получается удалением клетки высшей размерности из m -мерного тора $(S^1)^m$.

Вообще, для \mathcal{K} на m вершинах, $(S^1)^{\vee m} \subset (S^1)^{\mathcal{K}} \subset (S^1)^m$.

Пример

Пусть $(X, A) = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. Тогда

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} := (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^I \subset \mathbb{R}^m.$$

Когда \mathcal{K} является дискретным набором из m точек, $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ является решёткой в \mathbb{R}^m , состоящей из всех прямых, параллельных координатным осям и проходящим через целочисленные точки.

Когда $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$, комплекс $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ является объединением всех целочисленных гиперплоскостей, параллельных координатным гиперплоскостям.

1. Полиэдральные и граф-произведения

Пусть $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_m)$ последовательность m дискретных групп, где $G_i \neq \{1\}$.

\mathcal{K} – симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$.

Определение

Граф-произведением групп G_1, \dots, G_m является

$$\mathbf{G}^{\mathcal{K}} := \bigstar_{k=1}^m G_k / (g_i g_j = g_j g_i \text{ для } g_i \in G_i, g_j \in G_j, \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

где $\bigstar_{k=1}^m G_k$ обозначает свободное произведение групп G_k .

Граф-произведение $\mathbf{G}^{\mathcal{K}}$ зависит только от 1-остова (графа) \mathcal{K} .

Пример

Пусть $G_i = \mathbb{Z}$. Тогда $\mathbf{G}^{\mathcal{K}}$ является *прямоугольной группой Артина*

$$RA_{\mathcal{K}} = F(g_1, \dots, g_m) / (g_i g_j = g_j g_i \text{ для } \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

где $F(g_1, \dots, g_m)$ является свободной группой с m образующими.

Когда \mathcal{K} является полным симплексом, группа $RA_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}^m$. Когда \mathcal{K} является дискретным набором из m точек, мы получаем свободную группу ранга m .

Пример

Пусть $G_i = \mathbb{Z}_2$. Тогда $\mathbf{G}^{\mathcal{K}}$ является *прямоугольной группой Кокстера*

$$RC_{\mathcal{K}} = F(g_1, \dots, g_m) / (g_i^2 = 1, g_i g_j = g_j g_i \text{ для } \{i, j\} \in \mathcal{K}).$$

Теорема

Пусть $RA_{\mathcal{K}}$ – прямоугольная группа Артина.

- 1 $\pi_1((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong RA_{\mathcal{K}}$.
- 2 Оба $(S^1)^{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}}$ асферическая тогда и только тогда, когда \mathcal{K} – флаговый.
- 3 $\pi_i((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ для $i \geq 2$.
- 4 $\pi_1(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ изоморфна коммутанту $RA'_{\mathcal{K}}$.

Теорема

Пусть $RC_{\mathcal{K}}$ – прямоугольная группа Кокстера.

- 1 $\pi_1((\mathbb{R}P^{\infty})^{\mathcal{K}}) \cong RC_{\mathcal{K}}$.
- 2 Оба $(\mathbb{R}P^{\infty})^{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ асферические тогда и только тогда, когда \mathcal{K} – флаговый.
- 3 $\pi_i((\mathbb{R}P^{\infty})^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ для $i \geq 2$.
- 4 $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ изоморфна коммутанту $RC'_{\mathcal{K}}$.

Пример

Пусть \mathcal{K} является границей m -угольника.

В этом случае $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ гомеоморфна замкнутой ориентируемой поверхности рода $(m - 4)2^{m-3} + 1$.

(Это наблюдение направляет к работе Коксетера 1938 года.)

Следовательно, коммутант соответствующей прямоугольной группы Кокстера $RC_{\mathcal{K}}$ является группой поверхности.

Аналогично, когда $|\mathcal{K}| \cong S^2$ (что эквивалентно тому, что \mathcal{K} является границей трёхмерного симплициального многогранника), $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является трехмерным многообразием. Следовательно, коммутатор соответствующей $RC_{\mathcal{K}}$ является группой 3-многообразия.

Теорема (Панов-В)

Пусть $RA_{\mathcal{K}}$ и $RC_{\mathcal{K}}$ — прямоугольные группы Артина и Кокстера, соответствующие симплициальному комплексу \mathcal{K} .

- (a) Коммутант $RA'_{\mathcal{K}}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда \mathcal{K}^1 является хордовым графом.
- (b) Коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда \mathcal{K}^1 является хордовым графом.

Часть (a) является результатом Servatius, Droms и Servatius.

Разница между (a) и (б) заключается в том, что коммутант $RA'_{\mathcal{K}}$ бесконечно-порождён, тогда как коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ — конечно-порождён.

Пусть G — группа. Коммутатор двух элементов $a, b \in G$, задаётся формулой $(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab$.

Мы определим следующий вложенный коммутатор длины k

$$(q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_k}) := (\dots ((q_{i_1}, q_{i_2}), q_{i_3}), \dots, q_{i_k}).$$

как *простой вложенный коммутатор* $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_k}$.

Аналогично мы определяем *простой вложенный коммутатор Ли*

$$[\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots, \mu_{i_k}] := [\dots [[\mu_{i_1}, \mu_{i_2}], \mu_{i_3}], \dots, \mu_{i_k}].$$

Для любой группы G и любых трёх элементов $a, b, c \in G$ справедливы следующие тождества Витта–Холла:

$$\begin{aligned}(a, bc) &= (a, c)(a, b)(a, b, c), \\(ab, c) &= (a, c)(a, c, b)(b, c), \\(a, b, c)(b, c, a)(c, a, b) &= (b, a)(c, a)(c, b)^a(a, b)(a, c)^b(b, c)^a \\ &\quad (a, c)(c, a)^b,\end{aligned}\tag{1}$$

где $a^b = b^{-1}ab$.

Пусть $H, W \subset G$ — подгруппы. Определим $(H, W) \subset G$ как подгруппу, порождённую всеми коммутаторами (h, w) , $h \in H, w \in W$. В частности, коммутант G' группы G есть (G, G) .

Определение

Для любой группы G положим $\gamma_1(G) = G$ и определим индуктивно $\gamma_{k+1}(G) = (\gamma_k(G), G)$. Полученная последовательность групп $\gamma_1(G), \gamma_2(G), \dots, \gamma_k(G), \dots$ называется *нижним центральным рядом* группы G .

Определения

Если $H \subset G$ – нормальная подгруппа, т. е. $H = g^{-1}Hg$ для всех $g \in G$, мы будем использовать обозначение $H \triangleleft G$.

В частности, $\gamma_{k+1}(G) \triangleleft \gamma_k(G)$, и фактор-группа $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ является абелевой. Обозначим $L^k(G) := \gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ и рассмотрим прямую сумму

$$L(G) := \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L^k(G).$$

Возьмём $a_k \in \gamma_k(G) \subset G$, обозначим через \bar{a}_k его класс сопряжённости в фактор-группе $L^k(G)$. Если $a_k \in \gamma_k(G)$, $a_l \in \gamma_l(G)$, тогда $(a_k, a_l) \in \gamma_{k+l}(G)$. Тогда тождества Холла-Витта дают, что $L(G)$ – градуированная алгебра Ли над \mathbb{Z} (кольцо Ли) со скобкой Ли $[\bar{a}_k, \bar{a}_l] := \overline{(a_k, a_l)}$. Алгебра Ли $L(G)$ называется **присоединённой алгеброй Ли** группы G .

Теорема

Существует изоморфизм

$$H_k(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_J)$$

для любых $k \geq 0$, где $\tilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_J)$ является приведёнными симплициальными гомологиями \mathcal{K}_J .

Теорема (Панов-В)

Пусть $RC_{\mathcal{K}}$ — прямоугольная группа Кокстера, соответствующая симплициальному комплексу \mathcal{K} с m вершинами. Тогда коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ имеет конечный минимальный набор образующих, состоящий из $\sum_{J \subset [m]} \text{rank } \tilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ вложенных коммутаторов

$$(g_i, g_j), \quad (g_i, g_j, g_{k_1}), \quad \dots, \quad (g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_{m-2}}), \quad (2)$$

где $i < j > k_1 > k_2 > \dots > k_{\ell-2}$, $k_s \neq i$ для всех s , и i — наименьшая вершина связной компоненты, не содержащей j подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1, \dots, k_{\ell-2}, j, i\}}$.

Следствие

Свободная абелева группа $H_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = RC'_{\mathcal{K}}/RC''_{\mathcal{K}}$ ранга $\sum_{J \subset [m]} \text{rank } \tilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ имеет базис, состоящий из образов итерированных коммутаторов, описанных в теореме выше.

2. Нижний центральный ряд прямоугольной группы Кокстера

Предложение

Пусть G — группа с образующими $g_i, i \in I$. k -й член $\gamma_k(G)$ нижнего центрального ряда порождается простыми вложенными коммутаторами длины, большей или равной k , от образующих и обратных к ним.

Следствие

Пусть $RC_{\mathcal{K}}$ — прямоугольная группа Кокстера с образующими g_i . Тогда группа $\gamma_k(RC_{\mathcal{K}})$ порождается коммутаторами длины, большей или равной k от образующих g_i .

Предложение

Квадрат любого элемента $\gamma_k(RC_{\mathcal{K}})$ содержится в $\gamma_{k+1}(RC_{\mathcal{K}})$.

Доказательство.

В этом доказательстве мы используем γ_k вместо $\gamma_k(RC_K)$ для удобства восприятия.

Пусть $a \in \gamma_k$. Если $k = 1$, тогда $a = \prod_{i=1}^n g_{k_i}$. Если $k > 1$, тогда $a = \prod_{i=1}^n a_i$, где $a_i = (b_i, g_{p_i})$ или $a_i = (g_{p_i}, b_i)$, $b_i \in \gamma_{k-1}$. Мы используем индукцию по n .

Пусть $n = 1$. Случай $k = 1$ очевиден (потому что $g_k^2 = 1$). Если $k > 1$, тогда $a = (b, g_i)$ или $a = (g_i, b)$ для некоторого $b \in \gamma_{k-1}$. Для $a = (b, g_i)$ мы имеем $a^2 = (b, g_i)(b, g_i) = (g_i, (b, g_i)) \in \gamma_{k+1}$, и для $a = (g_i, b)$ мы имеем $a^2 = (g_i, b)(g_i, b) = (g_i, (g_i, b)) \in \gamma_{k+1}$.

Предположим теперь, что утверждение доказано для $n - 1$. Пусть $a = \prod_{i=1}^n a_i$ и $a^2 = \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n a_i$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_n = \\ & = (a_1^{-1}, (a_2 \cdots a_n)^{-1}) \cdot (a_2 \cdots a_n) a_1^2 (a_2 \cdots a_n)^{-1} \cdot (a_2 \cdots a_n)^2. \end{aligned}$$

Очевидно, что первый множитель лежит в $\gamma_{2k} \subset \gamma_{k+1}$. Второй множитель лежит в γ_{k+1} как класс сопряжённости a_1^2 (из индукции). Последний множитель также лежит в γ_{k+1} из индукции.

Следствие

$L(RC_{\mathcal{K}})$ — алгебра Ли над \mathbb{Z}_2 .

Через $FL_{\mathbb{Z}_2}\langle\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\rangle$ мы обозначим свободную градуированную алгебру Ли над \mathbb{Z}_2 с n порождающими μ_i , где $\deg \mu_i = 1$.

Для любого симплициального комплекса \mathcal{K} мы рассмотрим граф-алгебру Ли над \mathbb{Z}_2 :

$$L_{\mathcal{K}} := FL_{\mathbb{Z}_2}\langle\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\rangle / ([\mu_i, \mu_j] = 0 \text{ для } \{i, j\} \in \mathcal{K}).$$

Понятно, что $L_{\mathcal{K}}$ зависит только от 1-остова \mathcal{K}^1 (графа), однако, как и в случае прямоугольных групп Кокстера, нам удобнее работать с симплициальными комплексами .

Предложение

Существует эпиморфизм алгебр Ли $\varphi : L_{\mathcal{K}} \rightarrow L(RC_{\mathcal{K}})$.

Доказательство.

$L(RC_{\mathcal{K}})$ — алгебра Ли над \mathbb{Z}_2 , порожденная элементами $\bar{g}_i \in \gamma_1(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_2(RC_{\mathcal{K}})$, $i = 1, \dots, m$. По определению свободной алгебры Ли имеем эпиморфизм

$$\tilde{\varphi} : FL_{\mathbb{Z}_2} \langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \rangle \rightarrow L(RC_{\mathcal{K}}), \quad \mu_i \mapsto \bar{g}_i.$$

Так как существует соотношение $[\bar{g}_i, \bar{g}_j] = 0$ для $\{i, j\} \in \mathcal{K}$ в алгебре Ли $L(RC_{\mathcal{K}})$, эпиморфизм $\tilde{\varphi}$ пропускается через искомым эпиморфизм φ . □

На самом деле, гомоморфизм φ из предыдущего предложения не инъективен, а алгебры Ли $L_{\mathcal{K}}$ и $L(RC_{\mathcal{K}})$ не изоморфны. Это показывает разницу случая прямоугольных групп Кокстера от случая прямоугольных групп Артина, где ассоциированная алгебра Ли $L(RA_{\mathcal{K}})$ изоморфна граф-алгебре над \mathbb{Z} .

Пример

Пусть \mathcal{K} – дискретный набор из двух точек, т.е. $\mathcal{K} = \{1, 2\}$. Тогда $L_{\mathcal{K}} = FL_{\mathbb{Z}_2}\langle \mu_1, \mu_2 \rangle = FL_{\mathbb{Z}_2}\langle \mu_1 \rangle * FL_{\mathbb{Z}_2}\langle \mu_2 \rangle$ (здесь и далее $*$ обозначает свободное произведение алгебр или групп). Нижний центральный ряд $RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ следующий: $\gamma_1(RC_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, и для $k \geq 2$ мы имеем $\gamma_k(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}$ – бесконечная циклическая группа, порожденная коммутатором $(g_1, g_2, g_1, \dots, g_1)$ длины k . Предложение 2 даёт, что $\gamma_k(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_{k+1}(RC_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}_2$ для $k > 1$, и $\gamma_1(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_2(RC_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Рассмотрим алгебру $L(RC_{\mathcal{K}})$. Из аргументов выше, $L(RC_{\mathcal{K}}) = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \dots$. Легко видеть, что $L^k(RC_{\mathcal{K}}) \cong L_{\mathcal{K}}^k$ для $k = 1, 2$. Но при этом $L_{\mathcal{K}}^3 \cong \mathbb{Z}_2\langle [\mu_1, \mu_2, \mu_1], [\mu_1, \mu_2, \mu_2] \rangle$, тогда как $L^3(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}_2$. Таким образом,

$$L^3(RC_{\mathcal{K}}) \cong L_{\mathcal{K}}^3 / ([\mu_1, \mu_2, \mu_1] = [\mu_1, \mu_2, \mu_2]).$$

Отсюда следует, что гомоморфизм φ не инъективен.

Предложение

Пусть \mathcal{K} – дискретный набор из двух точек. Тогда

$$L(RC_{\mathcal{K}}) \cong L_{\mathcal{K}} / ([a, \mu_1] = [a, \mu_2], \underbrace{[a, \mu_1, \dots, \mu_1, a]}_{2k+1} = 0, k \geq 0),$$

где $a = [\mu_1, \mu_2]$.

Теорема

Пусть \mathcal{K} – симплициальный комплекс на $[m]$, пусть $RC_{\mathcal{K}}$ – прямоугольная группа Кокстера, соответствующая \mathcal{K} , и $L(RC_{\mathcal{K}})$ – её присоединённая алгебра Ли. Тогда:

- (a) $L^1(RC_{\mathcal{K}})$ имеет базис $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m$;
- (b) $L^2(RC_{\mathcal{K}})$ имеет базис, состоящий из коммутаторов $[\bar{g}_i, \bar{g}_j]$ с $i < j$ и $\{i, j\} \notin \mathcal{K}$;
- (c) $L^3(RC_{\mathcal{K}})$ имеет базис, состоящий из
 - коммутаторов $[\bar{g}_i, \bar{g}_j, \bar{g}_j]$ с $i < j$ и $\{i, j\} \notin \mathcal{K}$;
 - коммутаторов $[\bar{g}_i, \bar{g}_j, \bar{g}_k]$ где $i < j > k$, $i \neq k$ и i – наименьшая вершина в компоненте связности $\mathcal{K}_{\{i,j,k\}}$ не содержащей j .

Как следствие, мы получаем описание первых трех последовательных факторов нижнего центрального ряда для свободного произведения групп \mathbb{Z}_2 .

Следствие

Пусть \mathcal{K} – дискретный набор из m points, т. н.

$RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2\langle g_1 \rangle * \dots * \mathbb{Z}_2\langle g_m \rangle$. Тогда:

- (a) $L^1(RC_{\mathcal{K}})$ имеет базис $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m$;
- (b) $L^2(RC_{\mathcal{K}})$ имеет базис, состоящий из коммутаторов $[\bar{g}_i, \bar{g}_j]$ с $i < j$;
- (c) $L^3(RC_{\mathcal{K}})$ имеет базис, состоящий из
 - коммутаторов $[\bar{g}_i, \bar{g}_j, \bar{g}_j]$ с $i < j$;
 - коммутаторов $[\bar{g}_i, \bar{g}_j, \bar{g}_k]$ с $i < j > k, i \neq k$.

Пример

Рассмотрим симплициальные комплексы на 3 вершинах.

Пусть $\mathcal{K} = \overset{\bullet}{1} \quad \overset{\bullet}{2} \quad \overset{\bullet}{3}$. Тогда $L^3(RC_{\mathcal{K}})$ имеет базис, состоящий из 5 коммутаторов:

$$[\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_2], [\bar{g}_2, \bar{g}_3, \bar{g}_3], [\bar{g}_1, \bar{g}_3, \bar{g}_3], [\bar{g}_1, \bar{g}_3, \bar{g}_2], [\bar{g}_2, \bar{g}_3, \bar{g}_1].$$

Пусть $\mathcal{K} = \overset{\bullet}{1} \text{---} \overset{\bullet}{2} \quad \overset{\bullet}{3}$. Тогда $L^3(RC_{\mathcal{K}})$ имеет базис, состоящий из 3 коммутаторов: $[\bar{g}_2, \bar{g}_3, \bar{g}_3], [\bar{g}_1, \bar{g}_3, \bar{g}_3], [\bar{g}_1, \bar{g}_3, \bar{g}_2]$.

Пусть $\mathcal{K} = \overset{\bullet}{1} \text{---} \overset{\bullet}{2} \text{---} \overset{\bullet}{3}$. Тогда $L^3(RC_{\mathcal{K}})$ порождена коммутаторами $[\bar{g}_1, \bar{g}_3, \bar{g}_3]$.

- [1] Ya. Veryovkin. *The Lie algebra associated with a right-angled Coxeter group*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 305(1), pp 53-62; arXiv:1901.06929.

Спасибо за внимание!

Proof of theorem

To simplify the notation we write L^k instead of $L^k(RC_{\mathcal{K}})$ and γ_k instead of $\gamma_k(RC_{\mathcal{K}})$. Statement (a) follows from the fact that

$$L^1 = \gamma_1/\gamma_2 = RC_{\mathcal{K}}/RC'_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2^m$$

with basis $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m$.

We prove statement (b). Consider the abelianization map

$$\varphi_{\text{ab}} : RC'_{\mathcal{K}} \rightarrow RC'_{\mathcal{K}}/RC''_{\mathcal{K}} = \gamma_2/\gamma'_2.$$

The group $RC'_{\mathcal{K}}/RC''_{\mathcal{K}} = H_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ is free abelian (above).

Consider $L^2 = \gamma_2/\gamma_3$. The group L^2 is a \mathbb{Z}_2 -module (see above), i. e.

$L^2 = \mathbb{Z}_2^M$ for some $M \in \mathbb{N}$. We have a sequence of nested normal subgroups

$$\gamma'_2 \triangleleft \gamma_4 \triangleleft \gamma_3 \triangleleft \gamma_2.$$

Consider the exact sequence of abelian groups:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \gamma_3/\gamma'_2 & \xrightarrow{\psi} & \gamma_2/\gamma'_2 & \longrightarrow & \gamma_2/\gamma_3 & \longrightarrow & 0. \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathbb{Z}^N & & \mathbb{Z}^N & & \mathbb{Z}_2^M & & \end{array}$$

Recall from Corollary above that the free abelian group $\gamma_2/\gamma'_2 = \mathbb{Z}^N$ has a basis consisting of the images of the iterated commutators with all different indices described in Theorem above. The images of the commutators of length ≥ 3 are contained in the subgroup $\gamma_3/\gamma'_2 \subset \gamma_2/\gamma'_2$. The group γ_3/γ'_2 also contains commutators of length 3 with duplicate indices, i. e. of the form $(g_j, g_i, g_i) = (g_i, g_j)^2$. Therefore, the homomorphism ψ acts by the formula:

$$\psi(\overline{(g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_{m-2}})}) = \overline{(g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_{m-2}})}, \quad m \geq 3,$$

$$\psi(\overline{(g_j, g_i, g_i)}) = \overline{(g_i, g_j)^2},$$

where the indices $i, j, k_1, \dots, k_{m-2}$ are all different. The elements $\overline{(g_j, g_i, g_i)}$ with $i < j$, $\{i, j\} \notin \mathcal{K}$, and the elements $\overline{(g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_{m-2}})}$, $m \geq 3$, with the condition on the indices from theorem above form a basis in a free abelian group γ_3/γ'_2 .

It follows that the \mathbb{Z}_2 -module $L^2 = \gamma_2/\gamma_3$ has a basis consisting of the elements $\overline{(g_i, g_j)} = [\overline{g_i}, \overline{g_j}]$ with $i < j$ and $\{i, j\} \notin \mathcal{K}$, proving (b).

Note that

$$\begin{aligned}(g_i, g_j, g_j, g_j) &= ((g_j, g_i) \cdot (g_j, g_i), g_j) = \\ &= ((g_j, g_i), g_j) \cdot (((g_j, g_i), g_j), (g_j, g_i)) \cdot ((g_j, g_i), g_j) \equiv (g_j, g_i, g_j)^2 \pmod{\gamma'_2},\end{aligned}$$

because $((g_j, g_i), g_j), (g_j, g_i)) \in \gamma'_2$. Here in the second identity we used Hall-Witt commutator identity. A similar decomposition holds for other commutators of type A , for example,

$$(g_i, g_j, g_i, g_k) = (g_j, g_i, g_k)^2 \pmod{\gamma'_2}.$$

Now consider the commutators of type B . We will need the following commutator identities. For any $a, b, c, d \in \gamma_1$ we have:

$$(a, b)(c, d) \equiv (c, d)(a, b) \pmod{\gamma'_2}. \quad (3)$$

It follows that the last of the Hall-Witt identities takes the following form modulo γ'_2 :

$$(a, b, c)(b, c, a)(c, a, b) \equiv 1 \pmod{\gamma'_2}. \quad (4)$$

Furthermore, the following identity was obtained in (Panov-V):

$$(g_q, (g_p, x)) = (g_q, x)(x, (g_p, g_q))(g_q, g_p)(x, g_p) \\ (g_p, (g_q, x))(x, g_q)(g_p, g_q)(g_p, x).$$

If $x \in \gamma_2$, then the previous identity and identity (3) imply

$$(g_q, (g_p, x)) \equiv (g_p, (g_q, x)) \pmod{\gamma'_2}. \quad (5)$$

To simplify the notation, we write i instead of g_i . From (1) and (4) we obtain

$$(g_i, g_j, g_k, g_i) = (((i, j), k), i) \equiv ((i, (i, j)), k)^{-1} \cdot ((k, i), (i, j))^{-1} \equiv \\ \equiv (k, (i, (i, j))) = (k, ((i, j), i)^{-1}) = (k, (j, i)^{-2}) = \\ = (k, (j, i)^{-1}) \cdot (k, (j, i)^{-1}) \cdot ((k, (i, j)^{-1}), (i, j)^{-1}) \equiv \\ \equiv (k, (j, i)^{-1})^2 = (g_i, g_j, g_k)^{-2} \pmod{\gamma'_2},$$

$$(g_i, g_j, g_k, g_j) = (((i, j), k), j) \equiv ((j, (i, j)), k)^{-1} \cdot ((k, j), (i, j))^{-1} \equiv \\ \equiv (k, (j, (i, j))) = (k, ((i, j), j)^{-1}) = (k, (j, i)^{-2}) \equiv (g_i, g_j, g_k)^{-2} \pmod{\gamma'_2}.$$

The last commutator of type B requires a lengthier calculation:

$$\begin{aligned}
 (g_i, g_j, g_k, g_k) &\equiv^1 (j, i, k) \cdot (i, j, k) \cdot (k, i, k) \cdot (i, k, k) \cdot ((k, j)^i, k) \cdot ((j, k)^i, k) \cdot \\
 &\quad \cdot ((i, k)^j, k) \cdot ((k, i)^j, k) \cdot (k, (j, (k, i)))^{-1} \cdot (k, (i, (j, k)))^{-1} \equiv^2 \\
 &\equiv^2 (k, (j, (k, i)))^{-1} \cdot (k, (i, (j, k)))^{-1} \equiv^3 (j, (k, (k, i)))^{-1} \cdot (i, (k, (j, k)))^{-1} = \\
 &\quad = (j, (i, k)^{-2})^{-1} \cdot (i, (k, j)^{-2})^{-1} \equiv (k, i, j)^2 \cdot (j, k, i)^2 \equiv \\
 &\quad \equiv (g_i, g_j, g_k)^{-2} \pmod{\gamma'_2}.
 \end{aligned}$$

Here is the identity \equiv^1 is obtained with help of the algorithm written by the author in Wolfram Mathematica using commutator identities (1).

The identity \equiv^2 follows from the relations $(a, b) \cdot (a^{-1}, b) = (b, a, a^{-1})$ and $(b, a, a^{-1}) \equiv 1 \pmod{\gamma'_2}$, if $a \in \gamma_2$.

The identity \equiv^3 follows from (5).

It follows that the homomorphism $\chi: \gamma_4/\gamma_2' \rightarrow \gamma_3/\gamma_2'$ acts by the formula:

$$\begin{aligned} \chi(\overline{(g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_{m-2}})}) &= \overline{(g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_{m-2}})}, \quad m \geq 4, \\ \chi(\overline{(g_j, g_i, g_i, g_j)}) &= \overline{((g_i, g_j), g_j)}^2, \\ \chi(\overline{(g_j, g_i, g_j, g_k)}) &= \overline{((g_i, g_j), g_k)}^2, \\ \chi(\overline{(g_i, g_j, g_k, g_k)}) &= \overline{((g_i, g_j), g_k)}^{-2}. \end{aligned}$$

where the indices corresponding to a different letters are different. Thus, the \mathbb{Z}_2 -module $L^3 = \gamma_3/\gamma_4$ has a basis consisting of the elements specified in the theorem.