Функция роста n-значной динамики

Михаил Чирков

Центр Интегрируемых систем при ЯрГУ, Ярославль

Томск, декабрь 2023

Аннотация

В этом докладе мы изучим n-значную динамику, полученнную из n-значного закона умножения на $\mathbb{C}$. Покажем полиномиальный рост числа новых точек в общем случае и докажем формулу для функции роста в случае простого n. Найдем много интересных связей с циклическими композициями.

Содержание

n-значные группы

Будем говорить, что на множестве X задана n-значная группа, если заданы:

- Ассоциативная операция $\mu : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to {}^{\mathrm{X}^{\mathrm{n}}}\!/_{\mathrm{S_n}}$
- Единица $\mathrm{e} \in \mathrm{X}$: $\mathrm{e} * \mathrm{x} = \mathrm{x} * \mathrm{e} = [\mathrm{x}, \ldots, \mathrm{x}]$
- Обратный элемент $\mathrm{inv} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, такой что $\mathrm{e} \in \mathrm{inv}(\mathrm{x}) * \mathrm{x}$ и $\mathrm{e} \in \mathrm{x} * \mathrm{inv}(\mathrm{x})$

n-значные группы

Будем говорить, что на множестве X задана n-значная группа, если заданы:

- Ассоциативная операция $\mu : X \times X \to {}^{X^n}\!/\!_{S_n}$
- Единица $e \in X$: $e * x = x * e = [x, \ldots, x]$
- Обратный элемент $\mathrm{inv} : X \to X$, такой что $e \in \mathrm{inv}(x) * x$ и $e \in x * \mathrm{inv}(x)$

Важный пример: $\mathbb{C}$ с операцией $\mu(x, y) = \left[\left(\sqrt[n]{x} + \exp\left(2\pi i \frac{k}{n}\right) \sqrt[n]{y}\right)^n \mid k = 1, \ldots, n\right]$, единицей $e = 0$ и обратным $\mathrm{inv}(x) = (-1)^n x$. Также получается как косетная n-значная группа $(\mathbb{C}, U_n)$. Далее обозначим $\varepsilon \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exp(\frac{2\pi i}{n})$

Постановка задачи

Пусть $x \in \mathbb{C}^*$, рассмотрим циклическую n-значную подгруппу $\langle x \rangle$. Рассмотрим ее действие на $\mathbb{C}$, которое естественно задается $T_x : \mathbb{C} \to {}^{\mathbb{C}^n}\!/_{S_n}$ как $T_x(y) = x * y$. Будем рассматривать итерации отображения T_x, т.е. $T_x^k(y) = x * T_x^{k-1}(y)$.

Постановка задачи

Пусть $x \in \mathbb{C}^*$, рассмотрим циклическую n-значную подгруппу $\langle x \rangle$. Рассмотрим ее действие на $\mathbb{C}$, которое естественно задается $T_x : \mathbb{C} \to {}^{\mathbb{C}^n}\!\big/_{S_n}$ как $T_x(y) = x * y$. Будем рассматривать итерации отображения T_x, т.е. $T_x^k(y) = x * T_x^{k-1}(y)$.

Вопрос: сколько различных точек в множестве $\{0\} \cup T_x(0) \cup T_x^2(0) \cup \ldots \cup T_x^k(0)$? Обозначим это число $P_n(k)$. Число новых точек, которые появились на последнем шаге обозначим за $Q_n(k) \overset{\text{def}}{=} P_n(k) - P_n(k-1)$.

Содержание

На первой итерации получаем только x, на второй итерации $(\sqrt[n]{x} + \varepsilon^{r_1} \sqrt[n]{x})^n = x(1 + \varepsilon^{r_1})^n = \alpha_{r_1} x$. Т.е. x в дальнейшем можно просто вынести за скобку и рассматривать динамику, не зависящую от выбора x. На третьей итерации получим $(\sqrt[n]{x} + \varepsilon^{r_2} \sqrt[n]{\alpha_{r_1} x})^n = x(1 + \varepsilon^{r_2} + \varepsilon^{r_2 + r_1})^n = \alpha_{r_1, r_2} x$

На первой итерации получаем только x, на второй итерации $(\sqrt[n]{x} + \varepsilon^{r_1}\sqrt[n]{x})^n = x(1+\varepsilon^{r_1})^n = \alpha_{r_1}x$. Т.е. x в дальнейшем можно просто вынести за скобку и рассматривать динамику, не зависящую от выбора x.
На третьей итерации получим
$(\sqrt[n]{x} + \varepsilon^{r_2}\sqrt[n]{\alpha_{r_1}x})^n = x(1+\varepsilon^{r_2}+\varepsilon^{r_2+r_1})^n = \alpha_{r_1,r_2}x$

Если расписывать дальше, то получим, что произвольный элемент на k-ой итерации задается следующим образом

$$\alpha_{r_1,\ldots,r_k} = (1+\varepsilon^{r_k}+\varepsilon^{r_k+r_{k-1}}+\ldots+\varepsilon^{r_k+r_{k-1}+\ldots+r_1})^n,\ r_i \in \{1,\ldots,n\} \quad (1)$$

На первой итерации получаем только x, на второй итерации $(\sqrt[n]{x}+\varepsilon^{r_1}\sqrt[n]{x})^n = x(1+\varepsilon^{r_1})^n = \alpha_{r_1}x$. Т.е. x в дальнейшем можно просто вынести за скобку и рассматривать динамику, не зависящую от выбора x.
На третьей итерации получим
$(\sqrt[n]{x}+\varepsilon^{r_2}\sqrt[n]{\alpha_{r_1}x})^n = x(1+\varepsilon^{r_2}+\varepsilon^{r_2+r_1})^n = \alpha_{r_1,r_2}x$

Если расписывать дальше, то получим, что произвольный элемент на k-ой итерации задается следующим образом

$$\alpha_{r_1,\ldots,r_k} = (1+\varepsilon^{r_k}+\varepsilon^{r_k+r_{k-1}}+\ldots+\varepsilon^{r_k+r_{k-1}+\ldots+r_1})^n,\ r_i \in \{1,\ldots,n\} \qquad (1)$$

Далее будет удобно перейти от сумм в показателях к другим параметрам $\alpha_{r_1,\ldots,r_k} = (\varepsilon^{a_1}+\varepsilon^{a_2}+\ldots+\varepsilon^{a_{k+1}})^n,\ a_i \in \mathbb{Z}_n$, причем $\exists a_j = 0$
Тогда можно переформулировать задачу:

$$P_n(k) = |A_0 \cup \ldots \cup A_k|, \text{где } A_j \overset{\text{def}}{=} \{(\varepsilon^{a_1}+\ldots+\varepsilon^{a_j})^n \mid a_i \in \mathbb{Z}_n, \exists a_l = 0\}$$

$$Q_n(k) = |\widetilde{A_k}|, \text{где } \widetilde{A_k} \overset{\text{def}}{=} A_k \setminus (A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1})$$

Далее считаем, что p – простое число, n – произвольное натуральное.

Множество A_k можно задать по-другому, если сгрупировать одинаковые слагаемые:
$A_k = \{(b_0 + b_1\varepsilon + \ldots + b_{n-1}\varepsilon^{n-1})^n \mid b_0 + \ldots + b_{n-1} = k,\ b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Здесь $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ – слабая композиция числа k на n слагаемых. Можно построить биекцию между слабыми композициями k на n слагаемых и $k + n$ на n слагаемых, тогда их количество $\binom{k+n-1}{n-1}$.

Множество A_k можно задать по-другому, если сгрупировать одинаковые слагаемые:
$A_k = \{(b_0 + b_1\varepsilon + \ldots + b_{n-1}\varepsilon^{n-1})^n \mid b_0 + \ldots + b_{n-1} = k,\ b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Здесь $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ – слабая композиция числа k на n слагаемых. Можно построить биекцию между слабыми композициями k на n слагаемых и $k + n$ на n слагаемых, тогда их количество $\binom{k+n-1}{n-1}$.

Введем множество B_k, чтобы избавиться от возведения в степень n:
$B_k \overset{\text{def}}{=} \{b_0 + b_1\varepsilon + \ldots + b_{n-1}\varepsilon^{n-1} \mid b_0 + \ldots + b_{n-1} = k,\ b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, тогда $A_k = {}^{B_k}\!/_{Z \sim \varepsilon Z}$. Умножению на ε соответствует циклический сдвиг $(b_{p-1}, b_0, \ldots, b_{p-2})$, поэтому введем понятие циклической композиции, известна формула для их количества:

$$\left\langle {k \atop n} \right\rangle = \frac{1}{k} \sum_{j \mid \gcd(n,k)} \varphi(j) \binom{k/j}{n/j}, \text{ где } \varphi(\cdot) \text{ – функция Эйлера} \qquad (2)$$

Некоторые факты про циклические композиции:

$$\left\langle {3n+1 \atop 3} \right\rangle = \omega(n), \quad \text{где} \quad \omega(n) = n(3n-1)/2 \text{ – пентагональные числа}$$

$$\left\langle {2n+1 \atop n} \right\rangle = C_n, \quad \text{где} \quad C_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} \text{ – числа Каталана}$$

A. Knopfmacher and N. Robbins, Some properties of cyclic compositions, Fibonacci Quarterly 48(3), 2010

Благодаря следующей лемме (которая верна только для простого числа p), получится найти явную формулу для $Q_p(k)$.

Лемма

Каждый элемент множества $\widetilde{A_k}$ представляется единственным образом при помощи класса эквивалентности слабой композиции $(b_0, \ldots, b_{p-1})$ относительно циклического сдвига, причем $b_0 = 1$.

В доказательстве используется тот факт, что $\varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Для составного числа, например, $n = 4$ известны различные соотношения на элементы U_4, например, $\varepsilon = -\varepsilon^3$.

Далее нужно из всех циклических слабых композиций k на n слагаемых (т.е. циклических композиций $k+n$ на n слагаемых) вычесть те, которые не содержат нуль, а они ровно соответствуют циклическим композициями k на n слагаемых. Итого, получаем

Теорема

Если p - простое, то $Q_p(k) = \left\langle {k+p \atop p} \right\rangle - \left\langle {k \atop p} \right\rangle$

Эта формула упрощается до

$$Q_p(k) = \frac{1}{p}\left[\binom{k+p-1}{p-1} - \binom{k-1}{p-1}\right]$$

$$P_p(k) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \left\langle {j+p \atop p} \right\rangle - \left\langle {j \atop p} \right\rangle = 1 + \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{k} \binom{j+p-1}{p-1} - \binom{j-1}{p-1}$$

Содержание

До этого мы рассматривали динамику в нуле при действии произвольного $x \in \mathbb{C}^*$. Теперь рассмотрим действие некоторого класса x на произвольный $y \in \mathbb{C}^*$.

Следствие

Если $x = \alpha y$, где $\alpha \in \widetilde{A}_k$, то те же асимптотические оценки верны, потому что $\widetilde{P}_n(r) \leqslant P_n(r+k)$

$$\alpha y * y = [(\alpha^{1/n} + \varepsilon^i)^n y \mid i \in \mathbb{Z}_n] = [(1 + \varepsilon^i \alpha^{1/n})^n \mid i \in \mathbb{Z}_n]$$

В общем случае, верно, что

$$Q_n(k) \leqslant \left\langle {k+n \atop n} \right\rangle - \left\langle {k \atop n} \right\rangle$$

Также старшая степень в выражении для $Q_p(k)$ сокращается, отсюда получаем, что $\deg Q_p(k) = p-2$, $\deg P_p(k) = p-1$. В общем случае, мы не можем гарантировать, что $Q_n(k)$ – это многочлен, но верна оценка $Q_n(k) = O(k^{n-2}), P_n(k) = O(k^{n-1})$.

Если предполагать, что $P_n(k)$ – это многочлен, то зная его асимптотику, мы можем найти его по значениям в узлах $0, \ldots, n-1$ как интерполяционный многочлен. Таким образом получены следующие формулы, которые проверены на точках $n, \ldots, 2n$, что дает большую увереность в том, что $P_n(k)$ – это действительно многочлен и имеет именно такой вид. Для простых p результат вычислений совпадает с полученной формулой.

$$\overline{P_2(k)} = k + 1,$$

$$\overline{P_3(k)} = 1 + \frac{1}{2}(k + k^2) = \overline{P_4(k)} = \overline{P_6(k)},$$

$$\overline{P_5(k)} = 1 + \frac{5}{12}(k + k^2) + \frac{1}{24}(k + k^2)^2,$$

$$\overline{P_7(k)} = 1 + \frac{7}{20}(k + k^2) + \frac{13}{180}(k + k^2)^2 + \frac{1}{720}(k + k^2)^3,$$

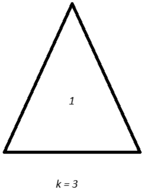
$$\overline{P_8(k)} = 1 + \frac{1}{3}(k + k^2) + \frac{1}{12}(k + k^2)^2,$$

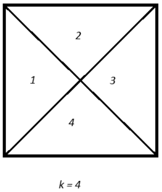
$$\overline{P_9(k)} = 1 + \frac{3}{10}(k + k^2) + \frac{11}{120}(k + k^2)^2 + \frac{1}{240}(k + k^2)^3,$$

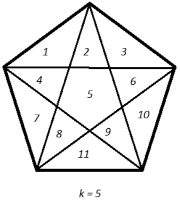
$$\overline{P_{10}(k)} = 1 + \frac{1}{4}(k + k^2) + \frac{1}{8}(k + k^2)^2 = \overline{P_{12}(k)}.$$

Содержание

Значения функции $P_5(k)$ совпадают с последовательностью a_k – число связных областей (включая внешнюю) на плоскости после изображения правильного k-угольника со всеми диагоналями.







Гипотеза

Функция $P_n(k)$ при $n > 2$ является многочленом с рациональными коэффициентами от $(k + k^2)$, причем $\deg P_n = \varphi(n)$

Многочлены $P_n(k)$ и $Q_n(k)$ являются целозначными. Любой целозначный многочлен p_d степени d можно представить как

$$p_d(x) = c_0\binom{x}{d} + c_1\binom{x}{d-1} + \ldots + c_d, \; c_j \in \mathbb{Z}$$

Утверждение

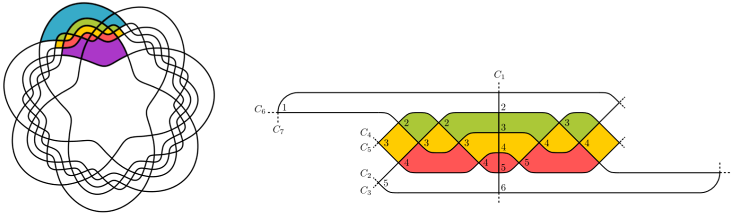
$$Q_p(k) = \sum_{i=1}^{p-2} a_{p,i} \binom{k}{i}, \text{ где } a_{p,i} = \frac{\binom{p-1}{i} + (-1)^{i+1}}{p}$$

Отступление (Диаграммы Венна)

Пусть D_p – диэдрально симметричная простая монотонная p-диаграмма Венна. Тогда можно D_p описать только одной областью. Если у нее есть поперечная симметрия, то $a_{p,i}$ – это число i-точек этой области слева от поперечного сечения.

Интересно, что симметричные n-диаграммы Венна существуют только для простого числа n.

K. Mamakani and F. Ruskey, A New Rose : The First Simple Symmetric 11-Venn Diagram, https://arxiv.org/pdf/1207.6452.pdf



(a) (b)

Fig. 1: (a) A simple rotationally symmetric monotone 7-Venn diagram with a cluster colored (shaded). (b) The cylindrical representation of a cluster of the diagram, showing the reflective aspect of crosscut symmetry.

Далее используем, что

$$\binom{k}{l} + \binom{k-1}{l} + \ldots + \binom{l}{l} = \binom{k+1}{l+1}$$

Получаем

Следствие

$$P_p(k) = 1 + \sum_{i=1}^{p-2} a_{p,i} \binom{k+1}{i+1}$$

Список литературы

- V. M. Buchstaber, n-valued groups: theory and applications, Moscow Math. J., 6, no. 1 (2006), 57–84.
- А.П. Веселов, Интегрируемые отображения, Успехи мат. наук, 46:5(281), 3-45 (1991)
- А.П. Веселов, О росте числа образов точки при итерациях многозначного отображения, Матем. заметки, 49(2), 29–35 (1991)
- М.А. Чирков, Функция роста n-значной динамики, Мат. заметки, принята к печати, рекомендована в том 115, вып. 3, 2024 https://arxiv.org/abs/2309.14251
- Последовательность A027927 https://oeis.org/A027927

Спасибо за внимание!