

# Копредставления коммутантов прямоугольных групп Коксетера

Федор Вылегжанин

НИУ ВШЭ, МГУ им. М.В.Ломоносова

Конференция “Алгебраическая топология, гиперболическая  
геометрия и компьютерный анализ данных”  
(5-10 декабря 2023, ТГУ, Томск)

## Граф-произведения групп

Пусть  $\Gamma$  – простой граф на  $m$  вершинах,  $\underline{G} = (G_1, \dots, G_m)$  – набор дискретных групп. Их **граф-произведение** – это

$$\underline{G}^\Gamma := (G_1 * \dots * G_m) / (h_i h_j = h_j h_i \text{ при } h_i \in G_i, h_j \in G_j, \{i, j\} \in \Gamma).$$

Эта группа занимает промежуточное положение между свободным и прямым произведением:

$$G_1 * \dots * G_m \twoheadrightarrow \underline{G}^\Gamma, \quad \underline{G}^\Gamma \xrightarrow{a} G_1 \times \dots \times G_m.$$

Группу  $\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma) := \text{Ker}(a) \subset \underline{G}^\Gamma$  называют **декартовой подгруппой** граф-произведения.

(Если  $G_1, \dots, G_m$  абелевы, то  $a$  – абелизация, поэтому  $\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma) = (\underline{G}^\Gamma)'$  – коммутант.)

## Прямоугольные группы Артина и Коксетера

Частные случаи конструкции граф-произведения:  
прямоугольные группы Артина

$$RA_\Gamma := \underline{\mathbb{Z}}^\Gamma = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i g_j = g_j g_i, \{i, j\} \in \Gamma \rangle$$

и прямоугольные группы Коксетера

$$RC_\Gamma := \underline{\mathbb{Z}}_2^\Gamma = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i g_j = g_j g_i, \{i, j\} \in \Gamma; g_i^2 = 1 \rangle.$$

Некоторые прямоугольные конфигурации гиперплоскостей в  $\mathbb{L}^n$  задают почти свободное действие  $RC_\Gamma \curvearrowright \mathbb{L}^n$ .

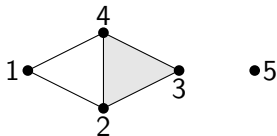
Тогда (свободно действующие) подгруппы в  $RC_\Gamma$  являются фундаментальными группами гиперболических многообразий.

Основная тема доклада: экономные копредставления  $RC'_\Gamma$ .

# Графы и симплициальные комплексы

Симплициальный комплекс без призрачных вершин  $\mathcal{K}$  на множестве вершин  $V$  – это семейство подмножеств  $I \subset V$  (граней), такое что

- Если  $J \in \mathcal{K}$  и  $I \subset J$ , то  $I \in \mathcal{K}$ ;
- $\{v\} \in \mathcal{K}$  для всех  $v \in V$ .



На рисунке слева,  $\mathcal{K} =$

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ .

Обычно  $V = [m] = \{1, \dots, m\}$ .

Каждому графу  $\Gamma$  соответствует **кликовый комплекс**

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \{I \subset [m] : \{i, j\} \in \Gamma, \forall i, j \in I\}.$$

## Полиэдральные произведения пространств

Пусть  $\mathcal{K}$  – симплициальный комплекс на  $[m]$ ,  
 $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1, \dots, m}$  – набор пар топологических пространств (т.е.  $A_i \subset X_i$ ).

Соответствующее **полиэдральное произведение** – это пространство

$$(\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left( \prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \in [m] \setminus I} A_i \right).$$

Пример:  $\mathcal{K} = \bullet\bullet$ ,  $(\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}} = X_1 \times A_2 \cup A_1 \times X_2$ . Ясно, что

$$\prod_{i=1}^m A_i \subset (\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}} \subset \prod_{i=1}^m X_i.$$

Мы пишем  $(X, A)^{\mathcal{K}}$ , когда  $X_1 = \dots = X_m = X$ ,  
 $A_1 = \dots = A_m = A$ .

Связь между  $\underline{G}^\Gamma$  и  $(\underline{X}, \underline{A})^\mathcal{K}$ 

Для дискретной группы  $G$  пусть  $BG = K(G, 1)$  – её классифицирующее пространство,  $EG$  – его универсальное накрытие. Например,  $B\mathbb{Z} = S^1$ ,  $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^\infty$ .

Теорема (Панов-Верёвкин '16; следствие из результатов Панова-Рэя-Фогта '04)

- $B(\underline{G}^\Gamma) = (B\underline{G}, \text{pt})^{\mathcal{K}(\Gamma)}$ ;
- $B(\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma)) = (E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}(\Gamma)}$ .

В частности: для  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Gamma)$  имеем

- $B(\text{RA}_\Gamma) = (S^1, \text{pt})^\mathcal{K} \subset \mathbb{T}^m$ ;
- $B(\text{RA}'_\Gamma) = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^\mathcal{K}$ ;
- $B(\text{RC}_\Gamma) = (\mathbb{R}P^\infty, \text{pt})^\mathcal{K}$ ;
- $B(\text{RC}'_\Gamma) = ([-1, 1], \{\pm 1\})^\mathcal{K} =: \mathcal{R}_\mathcal{K} \subset [-1, 1]^m$  – вещественный момент-угол комплекс.

## Следствие: гомологии декартовых подгрупп

Гомологии полиэдральных произведений вида  $(\underline{CA}, \underline{A})^{\mathcal{K}}$  известны (Bahri, Bendersky, Cohen, Gitler'08):

$$H_i((\underline{CA}, \underline{A})^{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}_{i-1}(|\mathcal{K}_J| \wedge \bigwedge_{j \in J} A_j; \mathbb{Z}).$$

Так как  $H_i(G; \mathbb{Z}) \cong H_i(BG; \mathbb{Z})$ , получаем:

$$H_i(\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma); \mathbb{Z}) = H_i((\underline{EG}, \underline{G})^{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}_{i-1}(\mathcal{K}_J; \mathbb{Z})^{\oplus n_J},$$

где  $n_J := \prod_{j \in J} (|G_j| - 1)$ . В частности,

$$H_i(RC'_\Gamma; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}_{i-1}(\mathcal{K}_J; \mathbb{Z}).$$

Копредставление  $RC'_\Gamma$  по Рейдемейстеру–Шрайеру

Алгоритм Рейдемейстера–Шрайера даёт следующее задание группы  $RC'_\Gamma$  образующими и соотношениями.

- $J \subset [m], j \in J, j \neq \max(J) \rightsquigarrow$  образующая

$$\gamma(J, j) := (g_{j_1} \cdots g_{j_k}) \cdot g_{j_s}^{-1} \cdot (g_{j_1} \cdots \widehat{g}_{j_s} \cdots g_{j_k})^{-1} \in RC'_\Gamma,$$

где  $J = \{j_1 < \cdots < j_k\}, j = j_s$ .

- $J \subset [m], \{j_s, j_t\} \in \Gamma \rightsquigarrow$  соотношение

$$\gamma(J, j_s) \cdot \gamma(J \setminus j_s, j_t) = \gamma(J, j_t) \cdot \gamma(J \setminus j_t, j_s),$$

где формально полагаем  $\Gamma(A, \max(A)) := 1$ .

Итого  $\sum_{J \subset [m]} (|J| - 1)$  образующих и  $\sum_{J \subset [m]} |\mathbf{E}(\Gamma_J)|$  соотношений. Хотим уменьшить эти числа.

# Ранг и дефект

Для любой дискретной группы  $G$  определим её **ранг**

$$\text{rank } G := \min_{G=\langle X|R \rangle} |X|$$

и **дефект**

$$\text{def } G := \min_{G=\langle X|R \rangle} (|R| - |X|).$$

Например,  $\text{rank}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5) = 2$ ,  $\text{def}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5) = 0$ .

Теорема Грушко:  $\text{rank}(G * H) = \text{rank } G + \text{rank } H$ . Ясно, что  $\text{rank } G \geq \text{rank } G_{\text{ab}}$ ,  $\text{rank } \mathbb{Z}^N = N$ .

Ранг группы  $RC'_\Gamma$ 

Для топологического пространства  $X$  обозначим  $\tilde{b}_0(X) := b_0(X) - 1 = \dim_{\mathbb{Q}} \tilde{H}_0(X; \mathbb{Q}) = \text{rank } \tilde{H}_0(X; \mathbb{Z})$ .

Теорема (Панов, Верёвкин '16)

$$\text{rank } RC'_\Gamma = \sum_{J \subset [m]} \tilde{b}_0(\mathcal{K}_J) =: N(\Gamma).$$

- Нижняя оценка:  $\text{rank } RC'_\Gamma \geq \text{rank } (RC'_\Gamma)_{\text{ab}}$ , но  $(RC'_\Gamma)_{\text{ab}} = H_1(RC'_\Gamma; \mathbb{Z}) = H_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}_0(\mathcal{K}_J; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{N(\Gamma)}$ .
- Верхняя оценка: указан набор из  $N(\Gamma)$  элементов, порождающих  $RC'_\Gamma$ . Для  $J = \{j_1 < \dots < j_k\} \subset [m]$  рассм. элемент

$$\delta(J, j_s) := (g_{j_1}, \dots, (\widehat{g}_{j_s}, \dots (g_{j_{k-1}}, (g_{j_k}, g_{j_s}))) \dots) \in RC'_\Gamma.$$

Нужно выбрать по элементу  $j_s$  из каждой компоненты связности комплекса  $\mathcal{K}_J$ , не содержащей  $j_k$ .

Ранг декартовой подгруппы  $C = \text{Cart}(\underline{G}, \Gamma) \subset \underline{G}^\Gamma$ 

Обозначим  $n_j := |G_j| - 1$ ,  $n_J := \prod_{j \in J} n_j$ .

Теорема (Панов, Верёвкин'19)

$$\text{rank } C = \sum_{J \subset [m]} n_J \cdot \tilde{b}_0(\mathcal{K}_J).$$

- Нижняя оценка:  $\text{rank } C \geq \text{rank } C_{\text{ab}}$ , но  $C_{\text{ab}} = H_1(C; \mathbb{Z}) = H_1((E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}_0(\mathcal{K}_J; \mathbb{Z})^{\oplus n_J}$ .
- Верхняя оценка: указан явный набор порождающих для  $C$ . Для  $J = \{j_1 < \dots < j_k\} \subset [m]$  и набора элементов  $\underline{h} = (h_j : j \in J)$ ,  $h_j \in G_j \setminus \{1\}$ , рассм. элемент

$$\delta(J, j_s, \underline{h}) := (h_{j_1}, \dots, (\hat{h}_{j_s}, \dots (h_{j_{k-1}}, (h_{j_k}, h_{j_s}))) \dots) \in C.$$

Нужно выбрать по элементу  $j_s$  из каждой компоненты связности комплекса  $\mathcal{K}_J$ , не содержащей  $j_k$ .

## Известные результаты про соотношения

## Теорема (Панов, Верёвкин'19)

Следующие условия эквивалентны:

- $RC'_\Gamma$  – свободная группа.
- $\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma)$  – свободная группа.
- $\Gamma$  – **хордовый** граф.

## Теорема (Грбич, Ильясова, Панов, Симмонс'22)

Следующие условия эквивалентны:

- $RC'_\Gamma$  – группа с одним соотношением.
- $RC'_\Gamma$  – группа поверхности рода  $g = (m - 4)2^{m-3} + 1$ .
- $\mathcal{K}(\Gamma) = C_m$  или  $C_m * \Delta$ , где  $C_m$  – простой  $m$ -цикл,  $m \geq 4$ .

## Немного обозначений

Пусть  $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$  – разбиение пространства  $X$  на компоненты линейной связности. Обозначим

$$\Pi_1(X) := \ast_{\alpha} \pi_1(X_{\alpha}), \quad p(X) := \sum_{\alpha} \text{rank } \pi_1(X_{\alpha}).$$

По теореме Грушко,  $p(X) = \text{rank } \Pi_1(X)$ . Заметим, что  $\Pi_1(X)_{\text{ab}} = H_1(X; \mathbb{Z})$ , так что  $p(X) \geq \text{rank } H_1(X; \mathbb{Z}) \geq b_1(X)$ .

Пример, когда все три числа различны: если  $X$  связно,  $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2 \ast \mathbb{Z}_3$ , то  $H_1(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_6$ . Тогда

$$\text{rank } \Pi_1(X) = 2, \quad \text{rank } \Pi_1(X)_{\text{ab}} = 1, \quad b_1(X) = 0.$$

## Число образующих и соотношений в $RC'_\mathcal{K}$

Напомним, что  $H_1(RC'_\Gamma; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{N(\Gamma)}$ ,  $N(\Gamma) = \sum_{J \subset [m]} \tilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ .

### Утверждение

Пусть  $RC'_\Gamma$  задана  $N$  образующими и  $M$  соотношениями. Тогда  $N \geq N(\Gamma)$  и  $M \geq \text{rank} \left( \bigoplus_{J \subset [m]} H_1(\mathcal{K}_J; \mathbb{Z}) \right)$ .

Вытекает из следующего факта (Epstein'61): если группа  $G$  задана  $N$  образующими и  $M$  соотношениями, то  $N \geq \text{rank } H_1(G; \mathbb{Z})$  и  $M - N \geq \text{rank } H_2(G; \mathbb{Z}) - \dim_{\mathbb{Q}} H_1(G; \mathbb{Q})$ .

### Теорема (B.)

$RC'_\Gamma$  можно задать  $N(\Gamma)$  образующими и  $\sum_{J \subset [m]} \rho(\mathcal{K}_J)$  соотношениями.

## Зазор между оценками

Получаем:

$$\text{rank} \left( \bigoplus_{J \subset [m]} H_1(\mathcal{K}_J; \mathbb{Z}) \right) \leq \text{def } RC'_\Gamma + N(\Gamma) \leq \sum_{J \subset [m]} \rho(\mathcal{K}_J).$$

Если обозначить  $\Pi := *_{J \subset [m]} \Pi_1(\mathcal{K}_J)$ , то

$$\text{rank } \Pi_{\text{ab}} \leq \text{def } RC'_\Gamma + N(\Gamma) \leq \text{rank } \Pi.$$

Поэтому: если  $\text{rank } \Pi = \text{rank } \Pi_{\text{ab}}$ , то мы знаем дефект  $RC'_\Gamma$ .  
(Это верно, например, если все группы  $\pi_1(\mathcal{K}_J)$  свободны).

Пример: пусть  $\mathcal{K}_\Gamma$  – триангуляция  $S^2$ . Из двойственности Александера,  $\text{def } RC'_\Gamma = 0$  – согласуется с тем, что  $RC'_\Gamma = \pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ ,  $\mathcal{R}_\mathcal{K}$  – асферичное трёхмерное многообразие.

# Число образующих и соотношений в $\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma)$

## Утверждение

Пусть  $\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma)$  задана  $N$  образующими и  $M$  соотношениями.  
 Тогда  $N \geq \sum_{J \subset [m]} n_J \cdot \tilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$  и  
 $M \geq \text{rank} \left( \bigoplus_{J \subset [m]} H_1(\mathcal{K}_J; \mathbb{Z})^{\oplus n_J} \right)$ .

## Теорема (В.)

$\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma)$  можно задать  $\sum_{J \subset [m]} n_J \cdot \tilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$  образующими и  
 $\sum_{J \subset [m]} n_J \cdot p(\mathcal{K}_J)$  соотношениями.

Зазор между нижней и верхней оценкой на дефект равен  $\text{rank } \Pi - \text{rank } \Pi_{\text{аб}}$ , где теперь  $\Pi = \ast_{J \subset [m]} \Pi_1(\mathcal{K}_J)^{\ast n_J}$ .

Явное описание образующих для  $RC'_\Gamma$ 

Напомним, что

$$\gamma(J, j_s) = (g_{j_1} \cdots g_{j_k}) \cdot g_{j_s}^{-1} \cdot (g_{j_1} \cdots \hat{g}_{j_s} \cdots g_{j_k})^{-1} \in RC'_\Gamma, \\ J = \{j_1 < \cdots < j_k\}.$$

Например,  $\gamma(\{1, 2, 5, 7\}, 5) = g_1 g_2 g_5 g_7 \cdot g_5^{-1} \cdot (g_1 g_2 g_7)^{-1}$ .

Назовём элемент  $\gamma(J, j)$  **хорошим**, если в комплексе  $\mathcal{K}_J$  верно:

- $j$  – наименьшая вершина в своей компоненте связности;
- $j$  и  $\max(J)$  находятся в разных компонентах связности.

## Предложение (Li Cai'20)

Хороших элементов ровно  $\sum_{J \subset [m]} \dim \tilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ , и они порождают  $RC'_\Gamma$ .

Тождества  $\gamma(J, j_s) \cdot \gamma(J \setminus j_s, j_t) = \gamma(J, j_t) \cdot \gamma(J \setminus j_t, j_s)$  для  $\{j_s, j_t\} \in \Gamma$  позволяют выразить все  $\gamma(J, j)$  через хорошие.

Явное описание соотношений в  $RC'_\Gamma$ 

## Утверждение

Пусть  $(j_1, j_2, \dots, j_N, j_{N+1} = i_1)$  – замкнутый цикл в  $\mathcal{K}_J$ . Тогда  
 (\*)  $\prod_{t=1}^N \gamma(J \setminus j_{t+1}, j_t) \cdot \gamma(J \setminus j_t, j_{t+1})^{-1} = 1$ .

Для каждого  $J \subset [m]$  рассмотрим  $\rho(\mathcal{K}_J)$  замкнутых путей по вершинам  $\mathcal{K}_J$ , которые порождают группу  $\Pi_1(\mathcal{K}_J)$ . Каждому из этих путей соответствует тождество вида (\*). Выразив входящие в него  $\gamma(I, i)$  через хорошие элементы, получим соотношение. Итого  $\sum_{J \subset [m]} \rho(\mathcal{K}_J)$  соотношений.

## Предложение (В.)

$\sum_{J \subset [m]} \dim \tilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$  хороших элементов  $\gamma(J, j)$ , и  $\sum_{J \subset [m]} \rho(\mathcal{K}_J)$  соотношений между ними, образуют копредставление группы  $RC'_\Gamma$ .

## Пример: граница пятиугольника (Li Cai, 2020)

Пусть  $\Gamma$  –  $m$ -цикл,  $m = 5$ . В группе  $RC'_\Gamma$  имеем

$\sum_{J \subset [m]} \tilde{b}_0(\mathcal{K}_J) = 10$  хороших элементов

$\gamma(13,1), \gamma(14,1), \gamma(24,2), \gamma(25,2), \gamma(35,3), \gamma(124,1), \gamma(135,3), \gamma(235,2), \gamma(245,2)$

и единственное тождество

$$\begin{aligned} &\gamma(1345,1)\gamma(2345,2)^{-1} \cdot \gamma(1245,2)\gamma(1345,3)^{-1} \cdot \gamma(1235,3)\gamma(1245,4)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \gamma(1234,4)\gamma(1235,5)^{-1} \cdot \gamma(2345,5)\gamma(1234,1)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Выражая  $\gamma(J, j)$  через хорошие элементы, получаем

$$\begin{aligned} &\gamma(235,2)\gamma(35,3)\gamma(25,2)^{-1}\gamma(245,2)\gamma(35,3)^{-1}\gamma(134,1)^{-1}\gamma(135,3)\gamma(14,1)\gamma(245,2)^{-1}\gamma(124,1)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \gamma(25,2)\gamma(135,3)^{-1}\gamma(13,1)\gamma(235,2)^{-1}\gamma(13,1)\gamma(124,1)\gamma(24,2)\gamma(14,1)^{-1}\gamma(134,1)\gamma(24,2)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

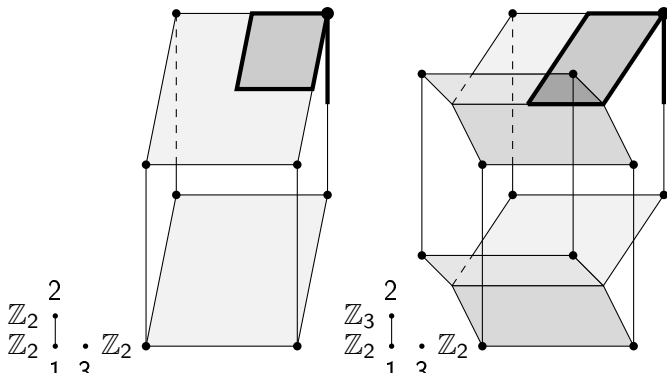
Заметим:  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$  – сфера с  $1 + (m - 4)2^{m-3} = 5$  ручками. Поэтому заменой образующих можно привести соотношение к виду

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3)(a_4, b_4)(a_5, b_5) = 1.$$

Идея доказательства: склеивание  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$  из кусочков

По определению,  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = ([-1, 1], \{-1, 1\})^{\mathcal{K}}$ . Это пространство склеено из  $2^m$  кусочков вида  $([0, 1], \{1\})^{\mathcal{K}}$ . Это стягиваемые пространства, гомеоморфные  $\text{cone}(|\mathcal{K}|)$ .

Аналогично,  $(E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}$  можно считать склеенным из  $\prod_{i=1}^m |G_i|$  кусочков вида  $([0, 1], \{1\})^{\mathcal{K}}$ .



Идея доказательства: склеивание  $\mathcal{R}_K$  из кусочков

По определению,  $\mathcal{R}_K = ([-1, 1], \{-1, 1\})^K$ . Это пространство склеено из  $2^m$  кусочков вида  $([0, 1], \{1\})^K$ . Это стягиваемые пространства, гомеоморфные  $\text{cone}(|K|)$ .

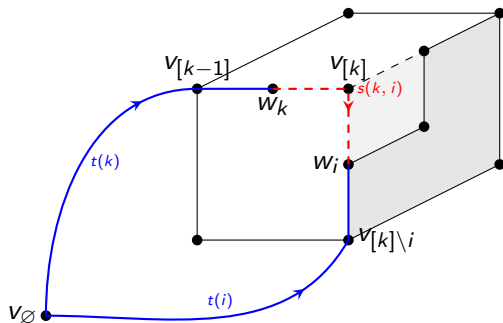
Аналогично,  $(E\underline{G}, \underline{G})^K$  можно считать склеенным из  $\prod_{i=1}^m |G_i|$  кусочков вида  $([0, 1], \{1\})^K$ .

Если их приклеивать в “лексикографическом порядке”, то  $J$ -ый будет приклеен по подпространству, гомотопически эквивалентному  $|K_J|$ . Применяя теорему Ван Кампена, получаем: на этом шаге добавляется  $\tilde{b}_0(K_J; \mathbb{Z})$  образующих и  $\rho(K_J)$  соотношений.

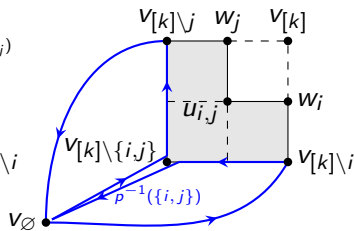
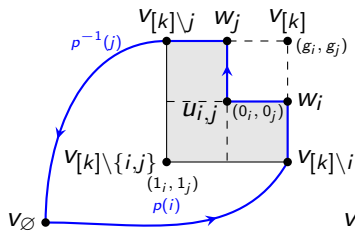
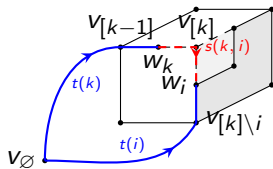
Итог: копредставление группы  $RC'_\Gamma = \pi_1(\mathcal{R}_K)$ , в котором  $\sum_{J \subset [m]} \tilde{b}_0(K_J)$  образующих и  $\sum_{J \subset [m]} \rho(K_J)$  соотношений.

## Наглядное описание образующих





Каждому элементу группы  $RC'_\Gamma$  можно сопоставить путь по пространству  $\mathcal{R}_K$  (с точностью до гомотопии, неподвижной на концах):  $g_i$  – путь по ребру в  $i$ -ом направлении, композиции переходят в композиции. Замкнутые пути соответствуют словам, лежащим в  $RC'_\Gamma$ . Это наглядно объясняет изоморфизм  $\pi_1(\mathcal{R}_K) \cong RC'_\Gamma$ .



# Наглядное описание соотношений



## Список литературы

-  V. M. Buchstaber and T. E. Panov. *Toric topology*, volume 204 of *Mathematical Surveys and Monographs*. AMS, Providence, RI (2015). arXiv:1210.2368
-  Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин. Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера. Матем. сб., 207:11 (2016), 105-126. arXiv:1603.06902
-  Taras Panov and Yakov Veryovkin. On the commutator subgroup of a right-angled Artin group. *J. Algebra*, 521 (2019), 284-298. arXiv:1702.00446
-  J. Grbić, M. Ilyasova, T. Panov and G. Simmons. One-relator groups and algebras related to polyhedral products. *Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A*, 152:1 (2022), 128-147. arXiv:2002.11476